

IRIA

Rapports de Recherche

N° 67

**SUR L'APPROXIMATION
D'ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES
INCOMPRESSIBLES VISQUEUX
PAR DES ÉLÉMENTS
FINIS TRIANGULAIRES
DE DEGRÉ UN**

**Alain DERVIEUX
François THOMASSET**

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
91887 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Avril 1981



Rapports de Recherche

N° 67

font 6. m. 21

SUR L'APPROXIMATION D'ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES INCOMPRESSIBLES VISQUEUX PAR DES ÉLÉMENTS FINIS TRIANGULAIRES DE DEGRÉ UN

1.2.2. 30. 24. 19
2. 3. 19

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. 954 90 20

Alain DERVIEUX
François THOMASSET

Avril 1981

SUR L'APPROXIMATION D'ÉCOULEMENTS MULTIFLUIDES
INCOMPRESSIBLES VISQUEUX PAR DES ÉLÉMENTS FINIS
TRIANGULAIRES DE DEGRÉ UN

Alain DERVIEUX, François THOMASSET

RESUME

On considère un écoulement multifluide instationnaire bidimensionnel régi par les équations de Navier-Stokes incompressibles. La méthode présentée est purement Eulérienne ; les vitesses sont approchées par un élément fini triangulaire de degré un non conforme à divergence nulle par triangle ; l'interface est simulée comme l'isovaleur d'une fonction (la pseudo-densité) approchée par l'élément fini triangulaire de degré conforme. On présente quelques simulations de l'instabilité de Rayleigh-Taylor.

SUMMARY

We consider a two dimensional transient multi-fluid flow governed by the incompressible Navier-Stokes system. The method is purely Eulerian ; the velocity is approximated with a non-conforming linear triangular divergence-free (on triangles) finite element ; the interface is obtained as the isovalue curve of a so-called "pseudo-density" function, approximated with the usual triangular conforming linear finite element. We give some results for the Rayleigh-Taylor instability.

INTRODUCTION

De nombreux codes de simulation d'écoulements utilisant des méthodes d'éléments finis ont été développés durant ces dix dernières années ; pour une revue de ces codes, nous référons à O.C. ZIENKIEWICZ [1], et F. THOMASSET [2].

L'application de méthodes d'éléments finis à des problèmes industriels est surtout intéressante pour la génération automatique de maillage lorsque les géométries sont compliquées ou mobiles au cours du temps. Cette souplesse d'adaptation est particulièrement évidente lorsque l'on utilise des éléments triangulaires de degré 1.

Ce rapport décrit un nouveau schéma pour la simulation d'un écoulement multifluide, non miscible, incompressible, régi par les équations de Navier-Stokes.

Ce type d'écoulement intervient dans de nombreux problèmes physiques et les méthodes de simulation mises au point sont elles aussi nombreuses (pour une revue de ces méthodes, nous renvoyons à P. LASCAUX [1] et A. DERVIEUX [1]).

Comme ces codes sont pour la plupart des codes de différence finies, il est intéressant de chercher à voir quelles contributions sont susceptibles d'être apportées par la méthodologie des éléments finis. Le travail que nous présentons ici s'articule sur quelques méthodes qui reposent sur cette méthodologie :

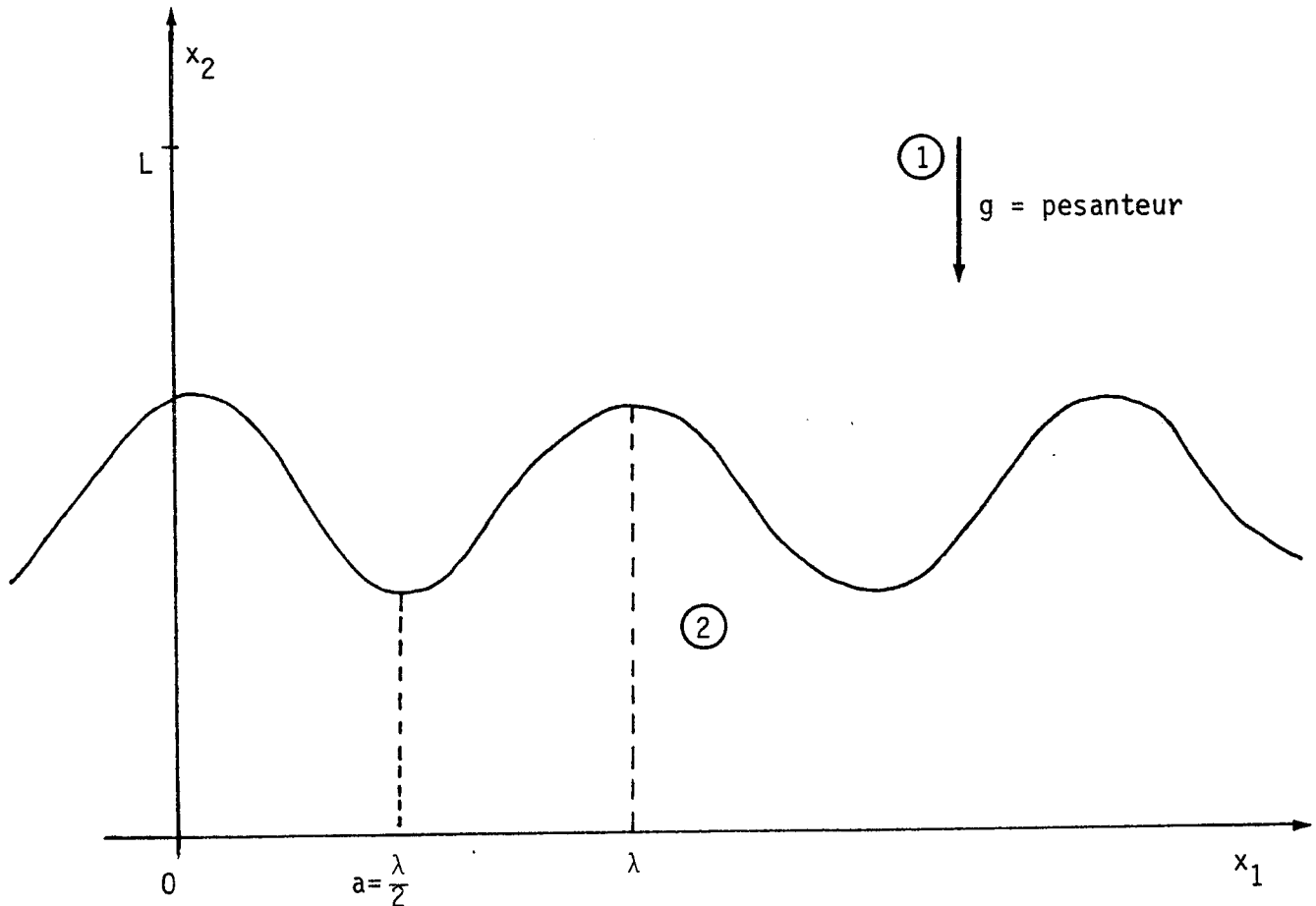
- La méthode de la pseudo-densité permet de représenter l'interface comme la courbe isovaleur d'une fonction approchée par éléments finis
- Deux méthodes de décentrage spécialement adaptées aux éléments finis utilisées
- L'extension de la méthode de pseudo-densité à la simulation de phénomènes de tension superficielle.
- Une approximation Lagrangienne dans laquelle le maillage est déplacé via les éléments finis.

Le plan est le suivant :

1. Un problème physique
2. La méthode de pseudo-densité
3. Un résultat de convergence
4. Implémentation du problème couplé
5. Résultats numériques de l'approximation Eulérienne centrée.
6. Présentation de deux méthodes de décentrage
7. Approximation de la tension interfaciale.
8. Méthode à interface Lagrangienne

1. - UN PROBLEME PHYSIQUE.

1.1. Formulation.



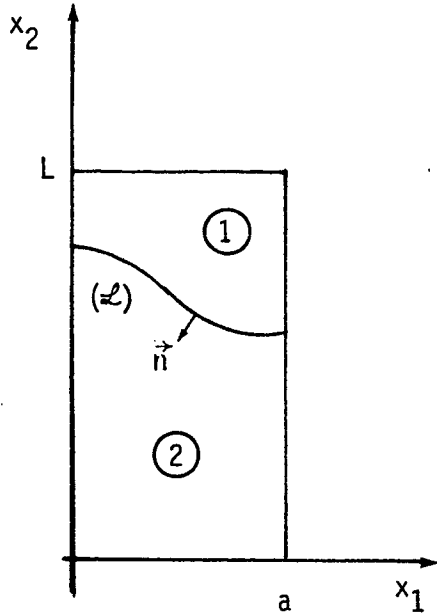
On considère un milieu bi-fluide dans un champ de pesanteur. Chaque milieu étant identifié par l'indice α ($\alpha=1$ ou 2), on note ρ^1 (resp. ρ^2) la densité de fluide supérieur (resp. inférieur) ; la pesanteur est dirigée suivant l'axe Ox_2 , le fluide supérieur étant le plus lourd ($\rho^1 > \rho^2$).

Comme hypothèse de travail, nous supposons que l'interface se déforme suivant une courbe périodique de période λ . Le problème est donc d'étudier les équations de Navier-Stokes d'un écoulement bi-fluide dans un domaine rectangulaire représentant l'écoulement sur une demi-période.

Pour borner le domaine dans le sens des x_2 , on supposera que les fluides sont au repos pour $x_2 > L$ et $x_2 < 0$.

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Notations



\mathcal{L} = interface des deux fluides,

\vec{n} = normale à \mathcal{L} , orientée du milieu ① vers le milieu ②.

ρ^1 = densité du fluide ①

ρ^2 = densité du fluide ②, $\rho^1 > \rho^2$

$\vec{u}^1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{pmatrix}$ = vitesse dans le milieu ①

$\vec{u}^2 = \begin{pmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \end{pmatrix}$ = vitesse dans le milieu ②

μ^1 = viscosité du fluide ①

μ^2 = viscosité du fluide ②

p^1 = pression dans le milieu ①

p^2 = pression dans le milieu ②

g = accélération de la pesanteur.

Nombre de Reynolds : $Re : \frac{a \sqrt{ga}}{(\mu^\alpha / \rho^\alpha)}$

Nombre d'Atwood : $\frac{\rho^1 - \rho^2}{\rho^1 + \rho^2}$

$$\sigma_{ij}^\alpha = -p^\alpha \delta_{ij} + \mu^\alpha \left(\frac{\partial u_i^\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x_i} \right), \quad \vec{\nabla} = \begin{cases} \partial / \partial x_1 \\ \partial / \partial x_2 \end{cases}$$

Equations de Navier-Stokes dans les milieux ① et ② :

$$(1.1) \quad \alpha = 1, 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^\alpha \frac{\partial u_i^\alpha}{\partial t} + \rho^\alpha (\vec{u}, \vec{\nabla}) u_i^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}^\alpha - \rho^\alpha g \delta_{i2} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}^\alpha = 0 \end{array} \right.$$

Conditions aux limites :

$$(1.2) \quad \begin{array}{l} - \text{sur } x_1 = 0, x_1 = a : u_1^\alpha = 0, \alpha = 1, 2 \quad \partial u_2^\alpha / \partial n = 0 \\ - \text{sur } x_2 = 0, x_2 = L : u_1^\alpha = u_2^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1 \text{ ou } 2) \\ - \text{sur l'interface } \mathcal{L} : \end{array}$$

$$(1.3) \quad \begin{cases} (\vec{u}^1 - \vec{u}^2)| = 0 \\ (\sigma_{ij}^1 n_j - \sigma_{ij}^2 n_j)| = 0 \end{cases}$$

$$(1.4) \quad \text{Vitesse normale de l'interface : } \vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{u}^1 \cdot \vec{n} = \vec{u}^2 \cdot \vec{n}$$

1.2. Transformation du problème.

Soit :

Ω^1 le domaine occupé par le milieu 1

Ω^2 le domaine occupé par le milieu 2

$$\overline{\Omega} = [0, a] \times [0, L] = \overline{\Omega}^1 \cup \overline{\Omega}^2$$

Soit χ la fonction caractéristique de Ω^1 :

$$\chi(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{dans } \Omega^1 \\ 0 & \text{dans } \Omega^2 \end{cases}$$

(χ prend des valeurs arbitraires sur l'interface \mathcal{L} , qui est de mesure nulle). On peut montrer que l'on a , au sens des distributions dans $\Omega \times [0, T]$ ($T > 0$) :

$$(1.5) \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \chi = 0$$

On peut maintenant re-écrire les équations sur Ω en fonction de χ :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i \right) = \sigma_{ij,j} - \rho g \delta_{i2} \\ \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \text{div } \vec{u} = 0 \end{cases}$$

avec :

$$(1.7) \quad \begin{cases} \rho = (1-\chi) \rho^1 + \chi \rho^2 = \begin{cases} \rho^1 & \text{dans } \Omega^1 \\ \rho^2 & \text{dans } \Omega^2 \end{cases} \\ \mu = (1-\chi) \mu^1 + \chi \mu^2 \\ p = (1-\chi) p^1 + \chi p^2 \end{cases}$$

avec les conventions :

$$(\sigma_{ij,j} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j})$$

Les équations étudiées sont maintenant (1.6), (1.7), (1.5) avec les conditions aux limites (1.2) sur \vec{u} ; on se ramène ainsi à un domaine fixe.

1.3 Formulation variationnelle de l'équation en vitesse.

De manière classique nous introduisons l'espace suivant :

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \{ \vec{v} = (v_1, v_2) \in [H^1(\Omega)]^2, \operatorname{div} \vec{v} = 0, \\ \vec{v} = 0 \text{ pour } y=0 \text{ et } y=L \\ v_1 = 0 \text{ pour } x=0 \text{ et } x=a \} \end{array} \right.$$

alors, posé dans V , le système (1.6) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \in L^2(0, T; V), \\ \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ \rho u_i \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_i (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i + \nu \vec{\nabla} u_i \cdot \vec{\nabla} v_i + \rho g \delta_{i2} v_i \right\} dx dy dT = 0 \\ \forall i=1,2, \quad \forall \vec{v} \text{ fonction régulière de } L^2(0, T; V). \end{array} \right.$$

Pour des résultats théoriques concernant la formulation faible (1.9) (1.5) (1.7) nous renvoyons à J.L. LIONS [2,3], J. SIMON [1] et à la bibliographie de ces travaux.

Pour notre part, nous chercherons à calculer une solution supposée suffisamment régulière ; la formulation (1.9) sera donc simplifiée sous la forme (mal posée il est vrai) :

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \vec{u} \in L^2(0, T; V), \text{ assez régulier, tel que} \\ \forall \vec{v} \in L^2(0, T; V) \text{ et pour } i=1,2 \\ \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} v_i + \rho v_i (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i + \nu \vec{\nabla} u_i \cdot \vec{\nabla} v_i + \rho g \delta_{i2} v_i \right\} dx dy dT = 0. \end{array} \right.$$

2. - LA METHODE DE PSEUDO-DENSITE.

2.1. Description de la méthode.

L'une des principales difficultés de la simulation est la représentation de l'interface qui sépare les deux fluides ; après les transformations du Paragraphe 1, il s'agit de résoudre le système suivant :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \chi = 0 \text{ dans } Q = \Omega \times]0, T[\\ \chi(x, 0) = \chi_0(x) \end{cases}$$

où χ_0 est la fonction caractéristique du domaine occupé par le fluide 1 à l'instant $t=0$.

Il est clair que le caractère discontinu de χ pose de gros problèmes lorsqu'on veut résoudre numériquement (2.1) ; le principe de la méthode consiste à remplacer χ par une fonction plus régulière ; plus précisément, nous utiliserons le schéma suivant :

Etant données :

- une fonction χ_0
- une subdivision $t_0 = 0, \dots, t_m, \dots, t_M = T$ de $]0, T[$;
- une vitesse \vec{u}^m , $m=1, M$ vérifiant :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \vec{u}^m \in L^\infty(\Omega) \\ \vec{u}^m \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On construit :

- une famille de triangulations (\mathcal{T}_h) du domaine Ω ;
- les espaces V_h d'éléments conformes définis sur \mathcal{T}_h ;
- une famille de fonctions ϕ_{oh} telle que

$$(2.3) \quad \begin{cases} \phi_{oh} \in V_h \\ \text{mes} [(\{\phi_{oh} > 0\} \setminus \{\chi_0 > 0\}) \cup (\{\chi_0 > 0\} \setminus \{\phi_{oh} > 0\})] \rightarrow 0 \\ \text{quand } h \rightarrow 0 \text{ (raffinement de la triangulation).} \end{cases}$$

L'itération d'un pas de temps à l'autre est définie comme suit

- on calcule ϕ_h^{m+1} , solution du système

$$(2.4) \quad \begin{cases} \phi_h^{m+1} \in V_h, \quad \forall \psi \in V_h \\ \frac{1}{t_{m+1}^m - t_m} (\phi_h^{m+1} - \phi_h^m, \psi)_{L^2(\Omega)} + a^{m+1}(\theta \phi_h^{m+1} + (1-\theta) \phi_h^m, \psi) = 0 \end{cases}$$

avec

$$a^{m+1}(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \alpha \psi \vec{u}^{m+1} \cdot \vec{\nabla} \phi - (1-\alpha) \phi \vec{u}^{m+1} \cdot \vec{\nabla} \psi \, dx \, dy$$

- on pose

$$(2.5) \quad \begin{cases} \chi_h^{m+1} = H_0 \phi_h^{m+1} \\ \text{avec} \\ H(x) = 0 \text{ si } s < 0, 1 \text{ si } s \geq 0. \end{cases}$$

Les paramètres θ et α sont choisis entre 0 et 1.

La convergence de cette méthode lorsque \vec{u} est indépendant du temps est montrée au Paragraphe 3.

2.2. Réinitialisation.

La méthode de pseudo-densité permet donc d'approcher une fonction caractéristique (et par conséquent essentiellement discontinue) à l'aide d'éléments finis continus (ou non).

Cette méthode est opérante dans la mesure où l'approximation ϕ_h^m de la pseudo-densité n'est pas trop "chahutée" : un trop fort gradient rend l'approximation (2.4) instable ou imprécise ; un gradient trop faible rend dans le calcul (2.5) la localisation de l'interface imprécise (ce qui peut être aussi source d'instabilité).

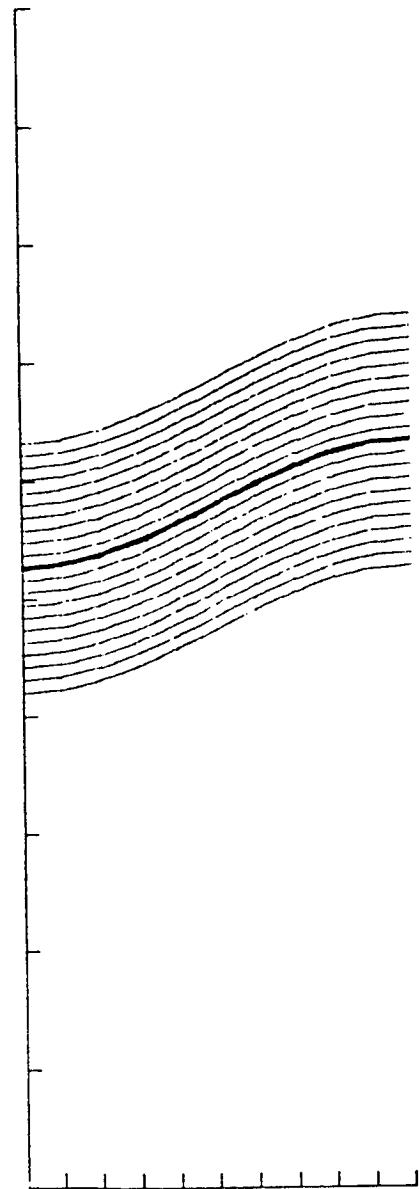
Si l'initialization ϕ_h^0 est convenablement choisie, alors ϕ_h^m restera un certain temps (indépendant du pas de temps si celui-ci est assez petit) apte à permettre une résolution précise du système (2.4) ; puis des zones à fort gradient ou au contraire à gradient trop faible se forment ; elles sont dues à la forme de l'écoulement (pincements, tourbillons) ; nous en

montrons un exemple dans les figures 1.1 à 1.4 pour le problème couplé ; ce phénomène est analogue (mais en moins grave) aux distorsions de maillage que l'on observe généralement en approximation Lagrangienne.

Cependant le remède est relativement facile à mettre en oeuvre ; comme pour les procédés de remaillage en approximation Lagrangienne, il s'agit de se débarrasser d'informations distordues non indispensables en se contentant de conserver l'interface elle-même : le procédé de réinitialisation que nous avons implanté dans notre programme consiste à remplacer la fonction ϕ_h^m par la fonction ϕ_h^m de V_h qui sera une approximation de la distance à l'interface $L_h^m = \{\phi_h^m = 0\}$, affectée du signe + dans Ω_1 et - dans Ω_2 .

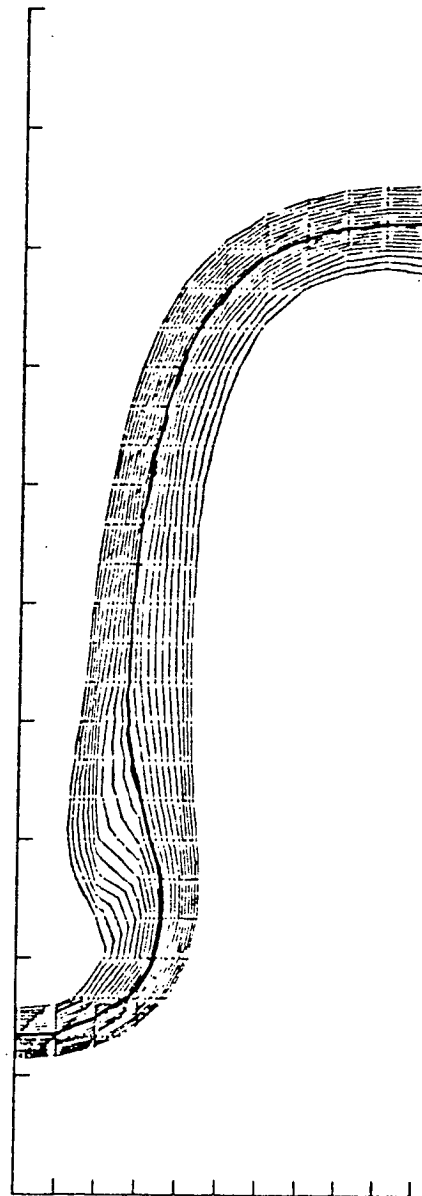
Cette "réinitialisation" de la pseudo-densité peut être subordonnée à un test sur la pente de ϕ_h^m ; cependant, afin d'évaluer l'incidence de cette procédure sur la précision de l'approximation nous l'avons appliquée à chaque pas de temps dans le test que nous présentons avec les Figures 1.5 à 1.8, à comparer avec les figures 1.1 à 1.4 pour lesquels la procédure n'est pas appliquée : les lignes minces sont des isovaleurs de la pseudo-densité ; la ligne épaisse est l'isovaleur 0 c'est-à-dire l'interface : on constate une bonne coïncidence des interfaces jusqu'au temps $t=2s.$; au temps $t = 2.5 s.$, la simulation sans "réinitialisation" est déjà imprécise (le point anguleux présenté par l'interface n'est pas physique) et on remarque de sévères instabilités pour $t = 3 s.$

En conclusion, l'application de ce procédé régularisé l'interface dans des proportions raisonnables et supprime la limitation en temps sur la validité de la simulation.



TEMPS T = 0.250E+0 • VITESSE MAX. = 0.140E+1

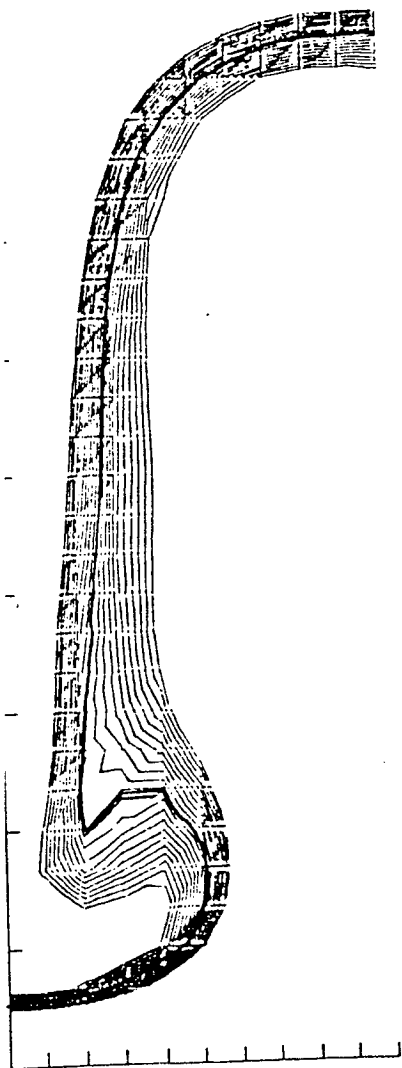
Figure 11



TEMPS T = 0.200E+1 • VITESSE MAX. = 0.445E+1

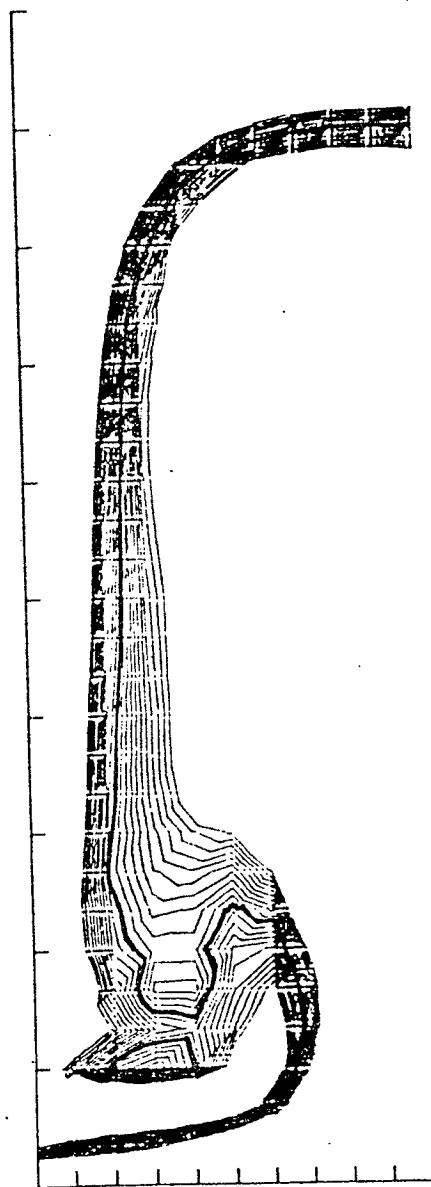
Figure 12

Isovaleurs de la pseudo-densité sans réinitialisation



TEMPS $T = 0.250E+1$ • VITESSE MAX. = $0.427E+1$

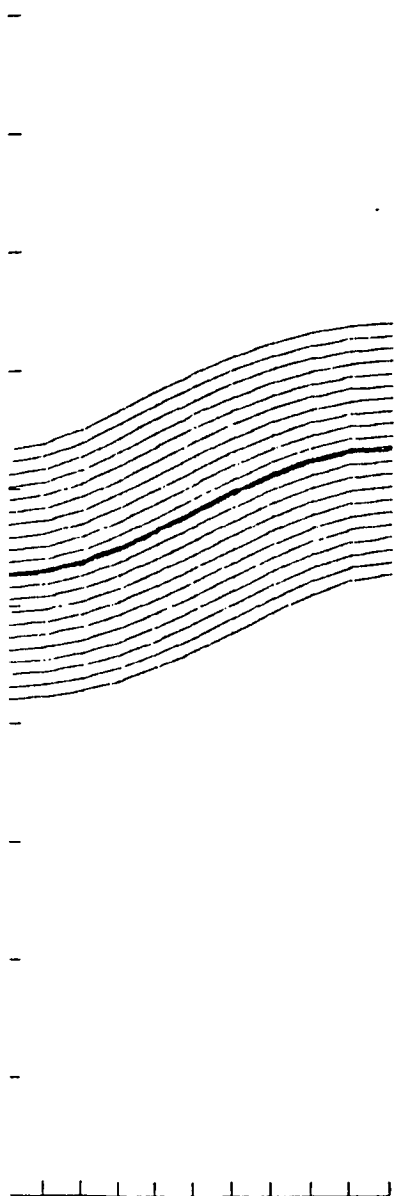
Figure 13



TEMPS $T = 0.300E+1$ • VITESSE MAX. = $0.414E+1$

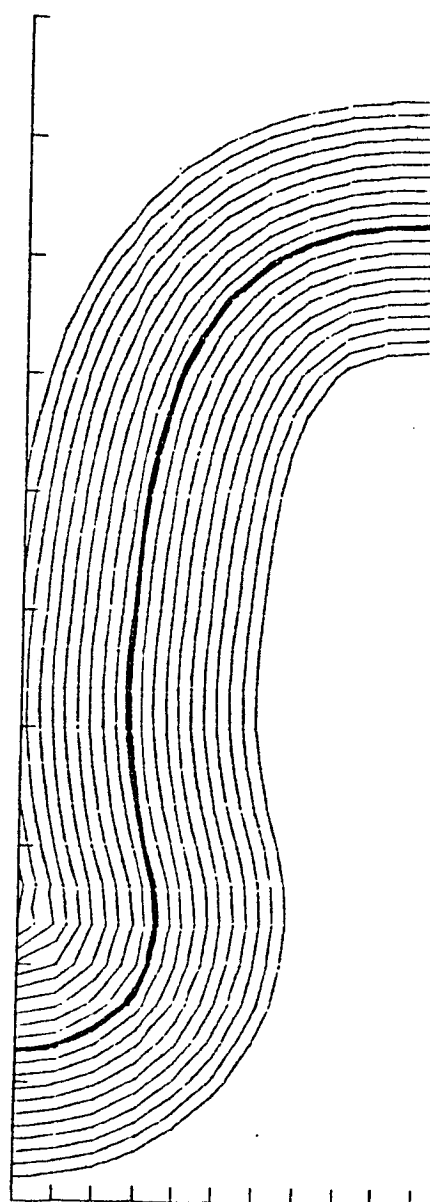
Figure 14

Isovaleurs de la pseudo-densité sans réinitialisation



TEMPS $T = 0.250E+0$ • VITESSE MAX. = $0.140E+1$

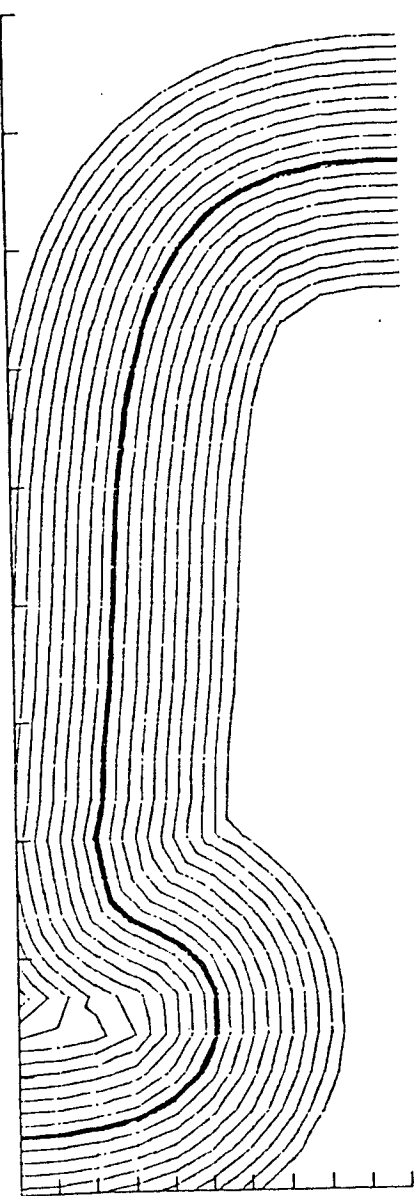
Figure 15



TEMPS $T = 0.200E+1$ • VITESSE MAX. = $0.446E+1$

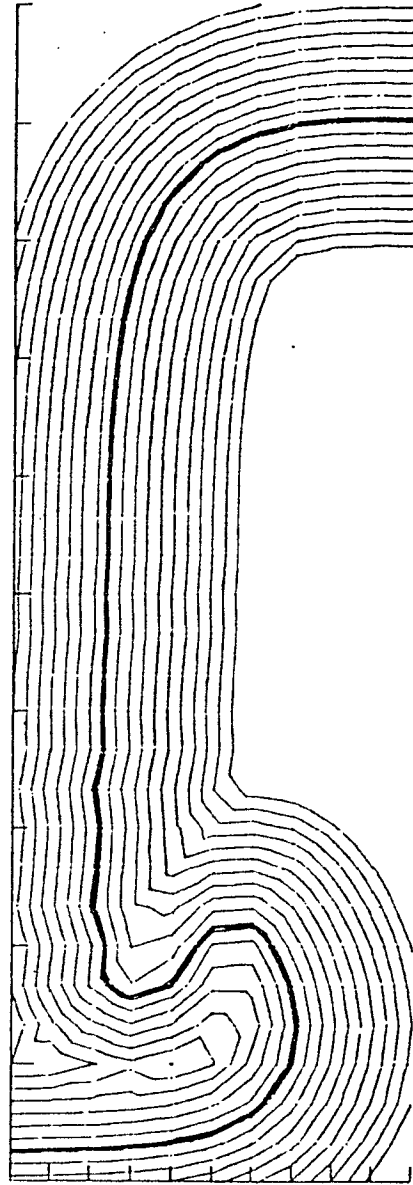
Figure 16

Isovaleurs de la pseudo-densité avec réinitialisation



TEMPS $T = 0.250E+1$ • VITESSE MAX. = $0.431E+1$

Figure 17



TEMPS $T = 0.300E+1$ • VITESSE MAX. = $0.414E+1$

Figure 18

Isovaleurs de la pseudo-densité avec réinitialisation

3. - UN RESULTAT DE CONVERGENCE.

Nous nous plaçons ici dans un contexte un peu particulier : d'une part le problème d'écoulement est découplé : nous supposons la vitesse \vec{u} indépendante de la fonction ϕ ; d'autre part, dans un but de simplification, mais cela n'est nullement essentiel, nous avons supposé la vitesse indépendante du temps.

La majeure partie de ce paragraphe est consacré à la démonstration de la convergence de la méthode de Galerkin (2.4) pour l'équation de transport : nous adaptons une démonstration de P. LESANT [1] pour les systèmes de Friedrichs : l'hypothèse de coercivité est ici remplacée par une propriété de conservation.

3.1. Problème continu : formulation et hypothèses.

Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^N , et \vec{u} est un champ de vecteurs de $[C^1(\Omega)]^N$ tel que

$$(3.1) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \text{ } (\vec{n} \text{ vecteur normal}). \end{cases}$$

On pose

$$Q = \Omega \times]0, T[, \quad T > 0$$

et on considère le système

$$(3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0 \text{ dans } Q \\ \phi(x, 0) = \phi_0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

où ϕ_0 est une fonction de $L^2(\Omega)$ donnée.

Si la condition initiale ϕ_0 est continue, alors le système (3.2) admet une solution continue d'après les résultats classiques sur les équations différentielles ; toute solution régulière (l'appartenance à $H^1[] 0, T[; H^1(\Omega)]$ suffit) est unique en tant que telle.

3.2. Discrétisation en temps.

Nous nous restreignons au cas $\theta = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ (cf. (2.4)) ; la forme bilinéaire associée a donc pour expression

$$(3.3) \quad a(\phi, \psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \psi \vec{u} \cdot \nabla \phi - \phi \vec{u} \cdot \nabla \psi \} dv ;$$

on remarque que cette forme est antisymétrique et que pour ϕ et ψ dans $H^1(\Omega)$, \vec{u} dans $[C^1(\bar{\Omega})]^N$, et vérifiant (3.1), on a

$$a(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi dv = - \int_{\Omega} \psi \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi dv .$$

Nous pouvons définir maintenant le système discrétisé en temps ($\Delta t > 0$) :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \phi^{m+1} \in H^1(\Omega), \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \\ \frac{1}{\Delta t} (\phi^{m+1} - \phi^m, \psi) + a\left(\frac{\phi^{m+1} + \phi^m}{2}, \psi\right) = 0 \\ \phi^0 = \phi_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

3.3. Discrétisation en espace.

Nous utiliserons les notations simplifiées suivantes :

$$(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$$

$$|\cdot| = |\cdot|_{L^2(\Omega)}$$

$$((\cdot, \cdot)) = ((\cdot, \cdot))_{H^1(\Omega)}$$

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H^1(\Omega)} .$$

Nous appliquons la méthode de Galerkin ; V_h est une approximation interne de $V = H^1(\Omega)$, consistante au sens suivant :

Il existe un sous-espace \mathcal{V} dense dans V et un opérateur r_h de \mathcal{V} dans V_h tels que

$$(3.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|v - r_h v\| = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

et d'autre part il existe pour tout h une constante $S(h)$ strictement positive telle que

$$(3.6) \quad \forall v_h \in V_h, \quad \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq S(h) |v_h|.$$

Dans certains résultats intermédiaires, on aura seulement à supposer que

$$(3.7) \quad \begin{cases} \phi_0 \in H^1(\Omega) \\ \vec{u} \in [L^\infty(\Omega)]^N ; \operatorname{div} \vec{u} = 0 ; \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La condition initiale discrète est définie à l'aide d'une famille (ϕ_h^0) telle que

$$(3.8) \quad \phi_h^0 \rightarrow \phi^0 \text{ fortement dans } H^1(\Omega) \text{ quand } h \text{ tend vers } 0$$

et le système discret s'écrit ($m \geq 0$)

$$(3.9) \quad \begin{cases} \phi_h^{m+1} \in V_h, \quad \forall \psi \in V_h \\ \frac{1}{\Delta t} (\phi_h^{m+1} - \phi_h^m, \psi) + \frac{1}{2} a(\phi_h^{m+1} + \phi_h^m, \psi) = 0 \end{cases}$$

3.4. Premiers résultats de stabilité.

Proposition 1 : Sous les hypothèses (3.5) à (3.8), toute solution (ϕ_h) de (3.9) (s'il en existe) vérifie

$$(3.10) \quad \int_{\Omega} (\phi_h^m)^2 \, dv = \int_{\Omega} (\phi_h^0)^2 \, dv \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Démonstration : Posons $\psi = \frac{1}{2} (\phi_h^m + \phi_h^{m+1})$ dans (3.9) ; d'après l'antisymétrie de a , on obtient

$$\frac{1}{2\Delta t} (\phi_h^{m+1} - \phi_h^m, \phi_h^{m+1} + \phi_h^m) = 0$$

d'où

$$|\phi_h^{m+1}|^2 = |\phi_h^m|^2 . \quad \blacksquare$$

Proposition 2 : Sous les hypothèses (3.5) à (3.8) on a aussi

$$\int_{\Omega} \phi_h^m dv = \int_{\Omega} \phi_h^0 dv .$$

(on prend $\psi=1$ dans (3.9)). \blacksquare

3.5. Existence et unicité de la solution approchée.

Proposition 3 : Le problème approché (3.9) admet sous les hypothèses (3.5) à (3.8) une solution unique.

Démonstration : La forme bilinéaire

$$b(\phi, \psi) = \frac{1}{\Delta t} (\phi, \psi) + \frac{1}{2} a(\phi, \psi)$$

est coercive sur $L^2(\Omega)$, puisque

$$(3.11) \quad b(\phi, \psi) = \frac{1}{\Delta t} |\phi|^2 ;$$

elle est donc coercive sur V_h , d'où l'existence.

Monstrons l'unicité : si (ϕ^m) et (ψ^m) sont deux solutions, alors par linéarité, $\delta^m = \phi^m - \psi^m$ est solution du système suivant :

$$(3.12) \quad \begin{cases} \delta^m \in V_h, \forall \psi \in V_h \\ \frac{1}{\Delta t} (\delta^m - \delta^{m-1}, \psi) + \frac{1}{2} a(\delta^m - \delta^{m-1}, \psi) = 0 \\ \delta^0 = 0 \end{cases}$$

d'où $\delta^m = 0$ d'après (3.10). \blacksquare

3.6. Stabilités supplémentaires.

Proposition 4 : On suppose maintenant que

$$(3.13) \quad \begin{cases} \vec{u} \in C^0(\bar{\Omega})^N \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ dans } \Omega \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

et que la condition de stabilité suivante est vérifiée

$$(3.14) \quad 1 - \frac{1}{4} \|\vec{u}\|_{[L^\infty(\Omega)]^N}^2 \Delta t [S(h)]^2 \geq 2\beta > 0$$

alors

$$(3.15) \quad \sum_{m=0}^{M-1} \beta |\phi_h^{m+1} - \phi_h^m|^2 \leq T |\phi_h^0|^2.$$

Démonstration : Montrons d'abord le

Lemme 1 : Sous l'hypothèse (3.13) on a $\forall \phi, \psi \in H^1(\Omega)$

$$(3.16) \quad a(\phi, \psi) \leq C \|\vec{u}\|_{L^\infty(\Omega)} |\phi|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{H^1(\Omega)}$$

Démonstration du lemme : Pour \vec{u} dans $[C^1(\bar{\Omega})]^N$ et vérifiant (3.13) on a

$$2a(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \{\psi \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi\} dv$$

via Stokes

$$= \int_{\Omega} \psi \phi \vec{u} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_{\Omega} \{-\phi \operatorname{div}(\vec{u} \psi) + \phi \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi\} dv$$

d'où

$$(3.17) \quad a(\phi, \psi) = - \int_{\Omega} \phi \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \psi dv$$

l'égalité est encore vraie par densité pour \vec{u} dans C^0 et nous avons

$$|a(\phi, \psi)| \leq \sum_{i=1}^N \|\vec{u}\|_{L^\infty(\Omega)} |\phi|_{L^2(\Omega)} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|_{L^2(\Omega)}$$

d'où le lemme. ■

Posons $\psi = \phi^{m+1}$ dans (3.9) :

$$\frac{1}{\Delta t} (\phi^{m+1} - \phi^m, \phi^{m+1}) + a(\phi^{m+1/2}, \phi^{m+1}) = 0$$

(avec $\phi^{m+1/2} = \frac{1}{2} (\phi^{m+1} + \phi^m)$) ; utilisons l'identité

$$2(a-b, a) = |a|^2 - |b|^2 + |a-b|^2$$

on a

$$(3.18) \quad \frac{1}{2\Delta t} [| \phi^{m+1} |^2 - | \phi^m |^2 + | \phi^{m+1} - \phi^m |^2] + a(\phi^{m+1/2}, \phi^{m+1}) = 0.$$

Or :

$$\begin{cases} a(\phi^{m+1/2}, \phi^{m+1}) = \frac{1}{2} a(\phi^{m+1}, \phi^{m+1}) + \frac{1}{2} a(\phi^m, \phi^{m+1}) \\ = \frac{1}{2} a(\phi^{m+1}, \phi^{m+1}) + \frac{1}{2} a(\phi^m, \phi^m) + \frac{1}{2} a(\phi^m, \phi^{m+1} - \phi^m) \end{cases}$$

utilisant $a(\psi, \psi) \equiv 0$ et injectant dans (3.18) on obtient

$$(3.19) \quad | \phi^{m+1} |^2 - | \phi^m |^2 + | \phi^{m+1} - \phi^m |^2 = \Delta t a(\phi^m, \phi^{m+1} - \phi^m).$$

Il nous faut estimer le second membre ; on utilise l'inégalité

$$2 a b \leq \frac{1}{\varepsilon} |a|^2 + \varepsilon |b|^2, \quad \varepsilon > 0 ;$$

d'où (compte-tenu du lemme, et en posant $C = \|U\|_{L^\infty(\Omega)}$)

$$\begin{cases} |a(\phi^m, \phi^{m+1} - \phi^m)| \leq C | \phi^m | \| \phi^{m+1} - \phi^m \|_{H^1(\Omega)} \\ \leq | \phi^m |^2 + \frac{C^2}{4} \| \phi^{m+1} - \phi^m \|_{H^1(\Omega)}^2 \\ \leq | \phi^m |^2 + \frac{C^2}{4} S(h)^2 | \phi^{m+1} - \phi^m |^2 \end{cases}$$

réinjections dans (3.19)

$$|\phi^{m+1}|^2 - |\phi^m|^2 + |\phi^{m+1} - \phi^m|^2 \leq \Delta t |\phi^m|^2 + \frac{\Delta t c^2}{4} S(h)^2 |\phi^{m+1} - \phi^m|^2$$

ce qui, compte tenu de la condition de stabilité (3.14) donne

$$(3.20) \quad |\phi^{m+1}|^2 - |\phi^m|^2 + 2\beta |\phi^{m+1} - \phi^m|^2 \leq \Delta t |\phi^m|^2$$

en sommant de 0 à M-1 il vient

$$(3.21) \quad |\phi^M|^2 + 2\beta \sum_{m=0}^{M-1} |\phi^{m+1} - \phi^m|^2 \leq |\phi^0|^2 + \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} |\phi^m|^2$$

mais d'après la Proposition 1,

$$|\phi^0|^2 + \Delta t \sum_{m=0}^{M-1} |\phi^m|^2 = (M+1)\Delta t |\phi^0|^2 \leq 2 T |\phi^0|^2$$

d'où la conclusion de la Proposition 4.

3.7. Convergence faible.

Il est nécessaire d'introduire quelques notations supplémentaires : (que nous empruntons à P.A. RAVIART [1]) ; on pose $k = \Delta t$, on note $\phi_{h,k}$ la solution $(\phi_h^0, \dots, \phi_h^M)$ et on pose

$$(3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_{h,k}(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \phi_{h,k}(mk) W_m(t) \\ W_m(t) \text{ est la fonction caractéristique de } [mk, (m+1)k[\\ \nabla_k \phi(t) = \frac{1}{k} [\phi(t+k) - \phi(t)] \\ \bar{\nabla}_k \phi(t) = \frac{1}{k} [\phi(t) - \phi(t-k)] \\ \phi_{h,k+1} = \phi_{h,k}(t+k) \end{array} \right.$$

Proposition 5 : Si la vitesse V vérifie (3.13), si h et k tendent vers zéro en vérifiant (3.14) pour un β fixé, alors

(i) de toute sous-suite $\phi_{h,k}$ on peut extraire une sous-suite (encore notée $\phi_{h,k}$) telle que

$$(3.23) \quad \phi_{hk} \rightarrow \phi^* \text{ dans } L^2(Q)$$

où ϕ^* est une solution faible du Problème (3.1) c'est-à-dire que

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi^* \in L^2(Q) \\ \forall \psi \text{ t.q. } \psi \in L^2(0T; H^1(\Omega)), \frac{d\psi}{dt} \in L^2(Q), \psi(T) = 0 \\ \int_Q \phi^* (\vec{u} \cdot \nabla \psi - \psi') dv dt = (\phi^0, \psi(0))_{L^2(\Omega)} \end{array} \right.$$

Démonstration : Il est nécessaire de préciser la condition initiale :

$$\phi_{h,k}(0) = 0_h \phi^0$$

$0_h \in \mathcal{L}(H, V_h)$; il n'est pas gênant de supposer que

$$(3.25) \quad \|0_h \phi^0\|_{L^2(\Omega)} = \|\phi^0\|_{L^1(\Omega)} \quad \forall h.$$

Le système discret s'écrit donc

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall v_h \in V_h \\ (\nabla_k \phi_{h,k}, v_h) + a(\phi_{h,k} + \frac{1}{2} k \nabla_k \phi_{h,k}, v_h) = 0 \\ \phi_{h,k}(0) = 0_h \phi^0 \end{array} \right.$$

Soit $\psi(t)$ une fonction scalaire continûment différentiable dans $[0, T]$ avec $\psi(T) = 0$ on pose

$$\psi_k(t) = \sum_{m=-1}^{M-2} \psi((m+1)k) w_m(t) ;$$

pour tout v dans \mathcal{V} l'intégration par parties discrète s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T (\nabla_k \phi_{h,k}(t), \psi_k(t) r_h v) dt = \\ - \int_0^T (\phi_{h,k}(t), \bar{\nabla}_k \psi_k(t) r_h v) dt - (\phi_{h,k}(0), r_h v) \psi(0) \end{array} \right.$$

et le système prend la forme faible

$$(3.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \{ -(\phi_{h,k}(t), \bar{\nabla}_k \psi_k(t) r_h v) + \frac{1}{2} a(\phi_{h,k}(t) + \phi_{h,k+1}(t), \psi_k(t) r_h v) \} dt \\ = (0_h \phi^0, r_h v) \psi(0) \end{array} \right.$$

Faisons tendre h et k vers zéro en vérifiant (3.14) ; d'après (3.10), on peut extraire des sous-suites telles que

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_{h,k} \rightarrow \phi^* \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible} \\ \phi_{h,k+1} \rightarrow \phi^* \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible} \end{array} \right.$$

On vérifie que $\phi^* = \phi_*$ grâce à (3.15) en remarquant que

$$\int_0^T |\phi_{h,k} - \phi_{h,k+1}|^2 dt = \sum_{m=0}^{M-1} k |\phi_h^{m+1} - \phi_h^m|^2 \leq \frac{T}{\beta} |\phi_h^0|^2 \quad k \rightarrow 0$$

En écrivant $a(\phi, \psi)$ sous la forme $-\int_{\Omega} \phi \nabla \cdot \nabla \psi dv$, on peut passer à la limite dans (3.27) ; nous obtenons (en utilisant (3.5))

$$\int_0^T \{ -(\phi^*, \psi'(t) v) + \frac{1}{2} a(\phi^* + \phi^*, \psi(t) v) \} dt = (\phi^0, v) \psi(0)$$

d'où (3.23) par densité des produits $\psi(t)v$ (cf. J.L. LIONS [1]).

Remarque 1 : Du fait du manque de résultat d'unicité pour le système (3.23) on ne sait pas si toute la suite $\phi_{h,k}$ converge ; comme dans P. LESAIN [1], la notion de solution forte (unique) est nécessaire pour une estimation de l'erreur :

3.8. Estimation de l'erreur.

Définition 1 : Une solution faible ϕ du système (3.24) est dite solution forte si on a

$$(3.29) \quad \phi \in L^2(0T, H^1(\Omega)) \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^2(Q).$$

Proposition 6 : Une solution forte ϕ de (3.24) vérifie le système

$$(3.30) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0 \text{ dans } L^2(Q) \\ \phi(x, 0) = \phi^0 ; \end{cases}$$

elle est unique et conservative au sens suivant :

$$(3.31) \quad |\phi(t)|^2 = |\phi^0|^2 \text{ p.p. sur }]0, T[.$$

Démonstration : On tire (3.30) de (3.24) par intégration par parties ; nous pouvons maintenant multiplier (3.30) par ϕ et intégrer

$$\int_0^T \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi, \phi \right) dt = 0$$

et en utilisant la formule de Stokes

$$\int_0^T \frac{\partial \phi}{\partial t} |\phi|^2 = 0$$

d'où (3.31) ; si ϕ^1 et ϕ^2 sont deux solutions fortes, alors $\delta\phi = \phi^1 - \phi^2$ est la solution forte du système

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\delta\phi) + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} (\delta\phi) = 0 \\ \delta\phi(0) = 0 \end{cases}$$

donc $\delta\phi$ est conservative c'est-à-dire

$$|\delta\phi(t)|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$$

d'où l'unicité. ■

Introduisons l'espace suivant

$$E_k(0, T, V_h) = \{ \psi(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \psi_m W_m(t) ,$$

avec $\psi_m \in V_h$ et $W_m(t)$ défini en (3.22) }, et la condition de consistance suivante :

$$(3.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists \tilde{\phi}_h \in E_k(0, T, V_h) \text{ t.q. quand } h, k \rightarrow 0 \\ \tilde{\phi}_h^0 \rightarrow \phi^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \\ \nabla_k \tilde{\phi}_h \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} \text{ dans } L^2(Q) \\ \tilde{\phi}_h \rightarrow \phi \text{ dans } L^2(0, T, H^1(\Omega)). \end{array} \right.$$

Nous pouvons énoncer maintenant le résultat d'estimation :

Proposition 7 : Supposons que ϕ soit une solution forte du système (3.30) ;
alors toute la suite $\phi_{h,k}$ définie dans la Proposition 5 converge fortement
vers ϕ et on a l'estimation d'erreur suivante :

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \max_t |\phi_h(t) - \phi|_{L^2(\Omega)} \leq \\ C [|\phi^0 - \phi_h^0|_{L^2(\Omega)} + |\tilde{\phi}^0 - \phi^0|_{L^2(\Omega)} + |\nabla_k \tilde{\phi}_h - \dot{\phi}|_{L^2(Q)} + \|\tilde{\phi}_h - \phi\|_{L^2(0T, H^1(\Omega))}] \\ \forall \tilde{\phi}_h \in E_k(0T, V_h) \end{array} \right.$$

Démonstration : Posons $\psi_h = \tilde{\phi}_h - \phi_h$; on utilisera les notations

$$\psi_{hk+1} = \psi_h(t+k)$$

$$\nabla_k \psi_h = \psi_{hk+1} - \psi_{hk}$$

$$\psi_{hk+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \psi_h(t+k) + \psi_h(t) \quad ;$$

on considère l'expression (m entier ≥ 1)

$$X_m = \int_0^{mk} (\nabla_k \psi_h, \psi_{hk+1/2}) dt$$

comme dans la démonstration de la Proposition 1, nous avons

$$(3.34) \quad X_m = \frac{1}{2} \{ |\psi_h^{m+1}|^2 - |\psi_h^0|^2 \}$$

nous avons aussi, en vertu de l'antisymétrie

$$\begin{aligned}
X_m &= \int_0^{mk} \{ (\nabla_k \psi_h, \psi_{hk+1/2}) + a(\psi_{hk+1/2}, \psi_{hk+1/2}) \} dt \\
&= \int_0^{mk} \{ (\nabla_k \tilde{\phi}_h, \psi_{hk+1/2}) + a(\tilde{\phi}_{hk+1/2}, \psi_{hk+1/2}) \} dt \\
&\quad + \int_0^{mk} \{ (\nabla_k \tilde{\phi}_h, \psi_{hk+1/2}) + a(\tilde{\phi}_{hk+1/2}, \psi_{hk+1/2}) \} dt.
\end{aligned}$$

Par définition de $\phi_h (\equiv \phi_{hk})$ la seconde intégrale est nulle (cf. (3.9) ; la première se majore ainsi

$$X_m \leq \int_0^{mk} |\psi_{hk+1/2}|_{L^2(\Omega)} |\nabla_k \tilde{\phi}_h + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi_h|_{L^2(\Omega)} dt ;$$

en prenant le maximum en m et compte tenu de (3.33) on a

$$\text{Max}_m |\psi_h^{m+1}|^2 \leq |\psi_h^0|^2 + 2 \text{Max}_m |\psi_h^{m+1}| \int_0^T |\nabla_k \tilde{\phi}_h + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi_h|_{L^2(\Omega)} dt ;$$

puisque l'intégrale en temps est bornée pour $\tilde{\phi}_h$ borné ; il en est de même pour la norme

$$|\psi_h^0|^2 = |\tilde{\phi}_h^0 - \phi_h^0|^2$$

on utilise l'implication

$$a, b, c > 0, \quad a^2 \leq b^2 + ac \quad a \leq \sqrt{2}b + 2c$$

on obtient

$$\text{Max}_m |\psi_h^{m+1}| \leq \sqrt{2} |\psi_h^0| + 4 \int_0^T |\nabla_k \tilde{\phi}_h + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi_h|_{L^2(\Omega)} dt$$

Les deux termes de la somme de droite se majorent ainsi

$$\left\{ \begin{aligned} |\psi_h^0| &\leq |\tilde{\phi}_h^0 - \phi_h^0| + |\phi_h^0 - \phi_h^0| \\ \int_0^T |\nabla_k \tilde{\phi}_h + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi_h|_{L^2(\Omega)} dt &\leq \sqrt{T} |\nabla_k \tilde{\phi}_h + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi_h|_{L^2(Q)} \\ &\leq \sqrt{T} \{ |\nabla_k \tilde{\phi}_h - \frac{\partial \phi}{\partial t}|_{L^2(Q)} + \|\vec{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\tilde{\phi}_h - \phi\|_{L^2(0T, H^1(\Omega))} \} ; \end{aligned} \right.$$

nous en déduisons (3.33) ; la convergence est assurée par l'hypothèse de consistance (3.32). ■

3.9. Erreur sur la fonction caractéristique.

Proposition 8 :

(i) Soient ϕ une fonction de $L^2(Q)$ telle que

$$(3.35) \quad f(\eta) = \text{mes}_Q \{-\eta \leq \phi \leq \eta\} \rightarrow 0 \text{ quand } \eta \rightarrow 0$$

et (ϕ_h) une suite de $L^2(Q)$ telle que

$$\phi_h \rightarrow \phi \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort ;}$$

alors pour tout réel $p, p \geq 1$ on a

$$H_0 \phi_h \rightarrow H_0 \phi \text{ fortement dans } L^p(Q).$$

(ii) Si l'on suppose de plus que

$$\begin{cases} f(\eta) \leq K_1 \eta \\ |\phi_h - \phi|_{L^2(Q)} \leq K_2 h \end{cases}$$

où η et h sont assez petits, et K_1, K_2 indépendants de η et h , alors, pour tout réel $p, p \geq 1$, il existe une constante $C(p)$ indépendante de h telle que

$$(3.36) \quad |H_0 \phi_h - H_0 \phi|_{L^p(Q)} \leq C(p) h^{\frac{2}{3p}}.$$

Démonstration : Nous avons

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (H(\phi_h) - H(\phi)) dx \leq \text{mes} \{\phi_h > 0 \text{ et } \phi < 0\} + \text{mes} \{\phi_h < 0 \text{ et } \phi > 0\} \\ \leq \text{mes} \{-\eta \leq \phi \leq \eta\} + \text{mes} \{\phi > \eta \text{ et } \phi_h < -\eta\} + \text{mes} \{\phi < -\eta \text{ et } \phi_h > \eta\} \\ \leq f(\eta) + \text{mes} \{|\phi - \phi_h| > 2\eta\}. \end{cases}$$

La deuxième partie de cette somme se majore ainsi

$$\text{mes} \{ |\phi - \phi_h| > 2\eta \} = \int_{|\phi - \phi_h| > 2\eta} 1 dv \leq \frac{1}{2\eta} \int_{|\phi - \phi_h| > 2\eta} |\phi - \phi_h| dv,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz nous obtenons

$$\text{mes} \{ |\phi - \phi_h| > 2\eta \} \leq \frac{1}{2\eta} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(Q)}^2 \text{mes} \{ |\phi - \phi_h| > 2\eta \}^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\text{mes} \{ |\phi - \phi_h| > 2\eta \} \leq \frac{1}{4\eta^2} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(Q)}^2$$

Démontrons le point (i) : pour réel $\alpha > 0$ on peut choisir η tel que

$$f(\eta) < \frac{\alpha}{2}$$

et h tel que

$$\frac{1}{4\eta^2} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(Q)}^2 < \frac{\alpha}{2}$$

d'où

$$\|H(\phi_h) - H(\phi)\|_{L^1(Q)} < \alpha.$$

Pour démontrer (ii), nous choisissons $\eta = h^{\frac{2}{3}}$; nous avons par ailleurs

$$\int_Q |H(\phi_h) - H(\phi)| dv dt \leq K_2 h^{2/3} + \frac{K_1^2}{4} h^{-\frac{4}{3}} h^2 \leq (K^2 + \frac{K_1^2}{4}) h^{\frac{2}{3}}. \quad \blacksquare$$

3.10. Conclusions.

La méthode de pseudo-densité est donc justifiée dès que la convergence forte a lieu pour la pseudo-densité (c'est-à-dire dans les conditions de la Proposition 7) et dès que $f(\eta)$ (Proposition 8) vérifie l'estimation convenable ; dans le cas où l'erreur sur la pseudo-densité est estimée, on en déduit - via (3.36) une estimation de l'erreur en mesure sur les fonctions caractéristiques.

Dans le cas d'une solution ϕ suffisamment régulière, en vertu de conservations triviales à vérifier via la théorie des caractéristiques, (l'hypothèse $\text{div } \vec{u} = 0$ est alors essentielle) on peut remplacer les conditions sur $f(\eta)$ par les mêmes conditions sur la fonction suivante :

$$g(\eta) = \text{mes}_{\Omega} \{ -\eta \leq \phi^0 \leq \eta \}.$$

4. - IMPLEMENTATION DU PROBLEME COUPLE.

4.1. Discrétisation en espace.

Nous utilisons des éléments finis triangulaires de degré 1 :

- conformes, avec les valeurs aux sommets comme degrés de liberté (l'élément le plus standard) pour la pseudo-densité ϕ .
- non conformes pour la vitesse \vec{u} , continus aux milieux des côtés.

Nous ne prétendons pas que c'est le seul choix possible ; nous lui avons simplement trouvé les avantages suivants :

- (i) L'utilisation d'éléments conformes pour calculer ϕ convient à l'obtention d'une interface continue, sous la forme d'une ligne brisée avec au plus un segment par triangle. La méthode est particulièrement séduisante par sa simplicité d'implémentation, ce qui n'est pas à négliger si on envisage une extension à trois dimensions, et parce qu'elle donne une réponse nette pour la position de l'interface et permet à ce titre d'envisager de prendre en compte des effets de tension superficielle (ce point est précisé plus loin).
- (ii) En ce qui concerne l'usage d'éléments non conformes pour la vitesse, il convient spécialement au traitement de la condition d'incompressibilité.

Nous allons préciser ce point :

Tout d'abord, remarquons que si nous définissons sur un maillage triangulaire un champ de vitesses continu, linéaire par triangle, les degrés de liberté seront les valeurs aux sommets, et les conditions

$$\vec{u}_h = 0 \text{ au bord}$$

$$\text{div } u_h = 0 \text{ sur chaque triangle}$$

impliqueraient⁽¹⁾ (cf. M. FORTIN [1])

$$\vec{u}_h \equiv 0.$$

Pour rajouter des degrés de liberté supplémentaires, nous allons relaxer - partiellement - la condition de continuité sur les côtés des triangles. Plus précisément, nous imposerons à la vitesse discrète \vec{u}_h d'être dans l'espace V_h défini comme suit :

⁽¹⁾ Sauf pour les maillages spéciaux.

Etant donnée une triangulation de Ω , les éléments \vec{u}_h de V_h satisfont aux conditions suivantes :

- (α) \vec{u}_h est polynomial de degré 1 sur chaque triangle ;
- (β) \vec{u}_h est continu aux points milieux de côtés ; les degrés de liberté de u_h sont donc les valeurs en ces points.

M. CROUZEIX et P.A. RAVIART [1] ont introduit cet élément et ont prouvé l'ordre de convergence suivant (problème de Stokes)⁽¹⁾

$$\|u_h - u\|_{1,\Omega} = O(h)$$

$$\|u_h - u\|_{0,\Omega} = O(h^2).$$

- (γ) \vec{u}_h vérifie la condition d'incompressibilité discrète

$$(4.1) \quad \text{div } \vec{u}_h = 0 \text{ sur chaque triangle.}$$

- (δ) \vec{u}_h vérifie les contraintes au bord issues de la formulation variationnelle.

Considérons la condition (4.1) : nous l'imposons par l'utilisation d'une base à divergence nulle, qui engendre l'espace V_h comme décrit dans F. THOMASSET [1] ; l'idée de cette construction est due à M. CROUZEIX [1] : puisque \vec{u}_h est de degré au plus 1, imposer la nullité de la divergence de \vec{u}_h sur chaque triangle T_h équivaut à imposer

$$(4.2) \quad \int_{\partial T_h} \vec{u}_h \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

(\vec{n} : vecteur unitaire normal à ∂T_h , dirigé vers l'extérieur de T_h).

D'après (4.2), une fonction de la base à divergence nulle appartient à l'une des classes suivantes :

- Fonction de base associée à un milieu de côté m : la fonction de base \vec{w}_m est définie par

⁽¹⁾ pour Navier-Stokes, voir R. TEMAM [1].

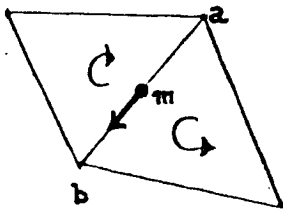


Figure 4.1

$$\vec{w}_m(m) = \frac{\vec{ab}}{ab}$$

$$\vec{w}_m = 0 \text{ aux autres noeuds milieux de côtés}$$

- Fonction de base associée à un sommet s :

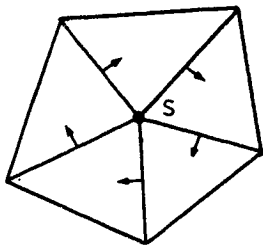


Figure 4.2

$w_s = 0$ sur tous les noeuds milieux de côtés de triangles n'ayant pas s comme sommet : le support de w_s est donc dans l'union des triangles voisins de s (Figure 4.2).

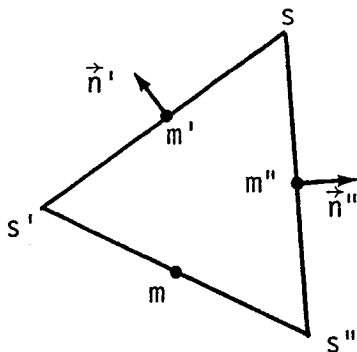


Figure 4.3

Sur chacun de ces triangles (Figure 4.3) :

$$w_s(m) = 0$$

$$w_s(m') = - \frac{\vec{n'}}{|ss'|}$$

$$w_s(m'') = + \frac{\vec{n''}}{|ss''|}$$

On remarque que la valeur du degré de liberté associé à s est la valeur en u d'une fonction courant discrète.

Au total, le nombre de degrés de liberté de u_h dans V_h est (aux conditions au bord près⁽¹⁾) la somme du nombre de sommets et du nombre de côtés.

Pour une construction en trois dimensions, nous renvoyons à F. HECHT [1].

Terminons par une importante remarque concernant la prise en compte des forces extérieures :

La divergence de la vitesse approchée ne sera pas nulle globalement mais seulement par triangle. Si le terme de gravité est intégré exactement,

(¹) Lesquelles donnent lieu à des fonctions de base adaptées, cf. F. THOMASSET [1].

on voit apparaître un phénomène de compressibilité numérique relativement important. Les deux types de fonctions de base sont en fait très inégaux devant ce phénomène ; il est facile de s'en rendre compte en considérant un seul fluide soumis à la gravité et donc à priori immobile : le bilan de l'action de la gravité sur une fonction de base "normale" attachée à un sommet est grosso modo nul (exactement nul si l'ensemble des triangles du support est symétrique par rapport à la verticale) ; par contre le même bilan pour une fonction de base "tangente" c.à d. attachée à un milieu de côté est loin d'être négligeable.

Le remède que nous proposons est donc d'adopter un schéma d'intégration numérique qui fera proter les efforts des forces extérieures uniquement sur les degrés de liberté aux sommets ("normaux").

Rappelons la formule d'intégration exacte ; nous utilisons les notations de la Figure 4.3 :

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_T \vec{g} \cdot \vec{v} &= \frac{\text{aire}(T)}{3} \sum_{m=m, m', m''} \vec{g}(m) \cdot \vec{v}(m) \\ &= \frac{\text{aire}(T)}{3} \sum_{n=m, m', m''} S(m) \end{aligned} \right.$$

où T est le triangle $ss's''$; nous utiliserons aussi les notations suivantes

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{n} &\text{ est la normale unitaire au point } m ; \\ \vec{p}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &\text{ est la projection de } \vec{a} \text{ sur } \vec{b} \text{ suivant } \vec{c} ; \\ \vec{g}_T(m) &= \vec{g}(m) - \vec{p}(\vec{g}(m), \vec{n}, s^T s'') \\ &\text{ (composante tangentielle de } \vec{g}(m) \text{)} ; \end{aligned} \right.$$

alors l'intégration numérique consiste à remplacer le produit scalaire $S(m)$ ($m = m, m', m''$) par

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{aligned} S_h(m) &= \vec{p}(\vec{g}(m), \vec{n}, s^T s'') \cdot \vec{v}(m) + \vec{p}(\vec{g}_T(m), \vec{n}', \vec{n}'') \cdot \vec{v}(m') \\ &\quad + \vec{p}(\vec{g}_T(m), \vec{n}'', \vec{n}') \cdot \vec{v}(m''). \end{aligned} \right.$$

Il est clair que tous les $S_h(m)$ sont nuls lorsque \vec{v} est une fonction de base tangente ; la diffusion numérique qui résulte de cette approximation

est théoriquement de l'ordre de h grad g (h : diamètre des triangles), ce qui fait zéro, c'est-à-dire que l'ordre de la précision est conservé.

Le couplage entre la vitesse et la pseudo-densité est réalisé par une intégration exacte du coefficient de transport dans l'équation en et par une intégration numérique des coefficients physiques (densité, viscosité) dans l'équation aux vitesses : nous calculons des moyennes de ces coefficients dans chaque triangle ; on pourrait croire que nous perdons ainsi un des avantages a priori de la formulation variationnelle, qui évite de diffuser les différents milieux uniformément dans chaque élément. Nous avons en fait comparé numériquement les deux approximations, qui se sont avérées très voisines pour les essais que nous présentons.

4.2. Discrétisation en temps.

L'équation en pseudo-densité est traitée de manière implicite (θ -schéma) et l'équation en vitesse est linéarisée implicite, ce qui donne à chaque pas de temps les schémas suivants :

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi^{m+1} \in E_h, \forall \psi \in E_h \\ \int_{\Omega} \left[\frac{\phi^{m+1} - \phi^m}{\Delta t} + \vec{u}^m \cdot \vec{\nabla} \phi^{m+\theta} \right] \psi \, dx \, dy = 0, \end{array} \right.$$

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}^{m+1} \in V_h, \forall \vec{v} \in V_h, \\ \int_{\Omega} \{ \rho(\phi^{m+1}) \left[\frac{\vec{u}^{m+1} - \vec{u}^m}{\Delta t} + (\vec{u}^m \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}^{m+\theta} \right] \cdot \vec{v} + \nu(\phi^{m+1}) \nabla u^{m+\theta} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right. \\ \left. - \rho(\phi^{m+1}) \vec{g} \cdot \vec{v} \right\} \, dx \, dy = 0 \end{array} \right.$$

avec la notation

$$\phi^{m+\theta} = (1-\theta)\phi^m + \theta\phi^{m+1}$$

$$\vec{u}^{m+\theta} = (1-\theta)\vec{u}^m + \theta\vec{u}^{m+1}$$

et où E_h désigne la base de l'élément standard P_1 non conforme dans Ω .

Dans ce schéma la matrice en vitesse est donc asymétrique.

Nous remarquons que pour $\theta = \frac{1}{2}$, le couplage entre \vec{u} et ϕ peut être considéré comme implicite : pour s'en rendre compte, on peut remplacer ϕ^m , $\phi^{m+\theta}$ et ϕ^{m+1} dans (4.6), (4.7) respectivement par $\phi^{m-1/2}$, ϕ^m et $\phi^{m+1/2}$ (l'approximation en temps de ϕ est donc décélée par rapport à celle de \vec{u}) ; ce schéma (Crank-Nicholson) est d'ordre 2 et semble plus avantageux pour le respect de certaines conservations.

Quant au choix $\theta=1$, implicite "pur", il rend le couplage (\vec{u}, ϕ) explicite dans (4.6) ; son principal "attrait" est son caractère stabilisateur : il introduit une diffusion en temps.

Nos motivations pour la construction de ce schéma reposent sur des soucis de stabilité et de simplicité d'utilisation : l'absence de procédé itératif⁽¹⁾ permet d'éviter le réglage de paramètres (tests d'erreurs...).

Ici encore le choix n'est pas le seul possible : B. LEGAIT [1] utilise une méthode explicite à pas variable pour la pseudo-densité. Dans le sens inverse (schémas plus sophistiqués) nous remarquerons que le caractère réparti de l'équation en ϕ (à la différence de particules en nuage ou en chaînes) facilite l'adaptation (en (\vec{u}, ϕ)) de schémas classiques plus performants : itérations implicites, schémas multipas, schéma d'ordre (en temps) plus élevés etc...

Donnons pour finir quelques indications sur les méthodes de résolution les systèmes (4.6) et (4.7) sont résolus à l'aide d'une factorisation LU (les matrices ne sont pas symétriques) issue de la bibliothèque MODULEF (D. BEGIS, A. PERRONNET [1]).

⁽¹⁾ les systèmes linéaires seront résolus de manière directe.

5. - RESULTATS NUMERIQUES DE L'APPROXIMATION EULERIENNE CENTREE.

5.1. Comportement linéaire.

Nous tentons de retrouver le comportement linéaire calculé par S. CHANDRASEKHAR et expérimenté par B. DALY (voir B. DALY [1]). Cette théorie fait intervenir le nombre de Reynolds $R = g^{1/2} \lambda^{3/2} \nu^{-1}$ où λ est la longueur d'ordre du mouvement et par conséquent le double de sa largeur.

Dans la comparaison que nous présentons, la demi-longueur d'onde $\frac{\lambda}{2}$ est égale à 0.02, la gravité à 1. et la viscosité $\nu = 1.119 \cdot 10^{-4}$, ce qui donne $R \approx 72$; les densités respectives sont 2. et 1. et la position initiale de l'interface est un segment horizontal et on donne une "impulsion initiale" de 0.0085 m/s.

Le maillage est orthogonal, les rectangles étant coupés en deux triangles à l'aide de la première diagonale ; on a 20×20 pas soit 800 triangles (441 degrés en ϕ , 1561 en vitesse) et nous avons pratiqué un raffinement au voisinage de l'interface via l'application

$$y \rightarrow y + 0.50 \sin (2\pi y/y_{\max}) / (2\pi y_{\max}),$$

où y_{\max} est la hauteur de la boîte ; nous avons pris $y_{\max} = 2 \times 0.02$.

Le résultat est présenté en Figure 5.1.

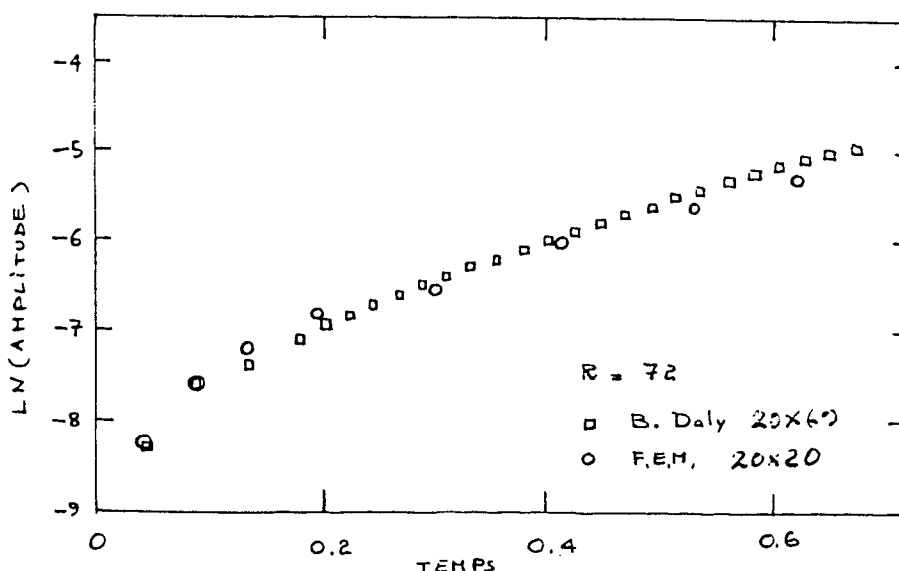


Figure 5.1 - Comportement linéaire

5.2. Convergence en espace.

Pour tester cette convergence, nous avons choisi une boîte carrée ; les deux fluides ont les caractéristiques suivantes :

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.2 \text{ (viscosités)}$$

$$\rho_1 = 10. \quad \text{(densités)}$$

$$\rho_2 = 1.$$

Le nombre de Reynolds est donc $R \approx 14$ ($g = 1.$) et le nombre d'Atwood

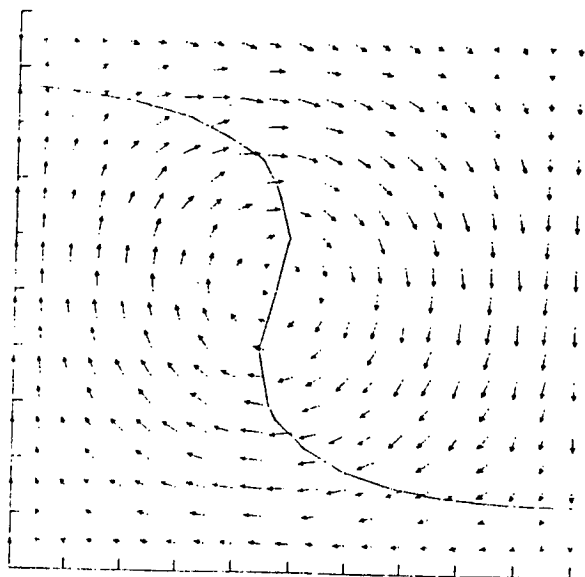
$$A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \sim 0.92.$$

La vitesse initiale est nulle et l'interface initiale est une sinusoïde d'amplitude 0.2.

Nous avons expérimenté successivement des maillages uniformes 10×10 , 15×15 , et 20×20 sur un temps de 2 secondes (pas de temps : 0.05 s. (Figure 5.2)).

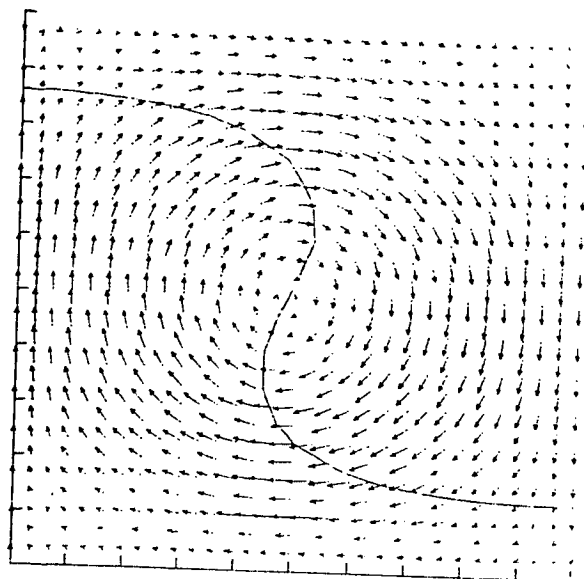
Nous constatons une bonne convergence des vitesses, avec une variation de 2,5 % de la vitesse maximale entre les maillages 10×10 et 20×20 , et 0.4% entre 15×15 et 20×20 au bout de 2 secondes. Entre ces deux derniers essais, l'erreur sur l'amplitude des pointes est aussi de l'ordre de 0.4%. Nous constatons toutefois une moins bonne convergence des vitesses des pointes (Figure 5.3) ; nous reviendrons sur ce point plus loin.

Figure 5.2

CONVERGENCE EN ESPACE

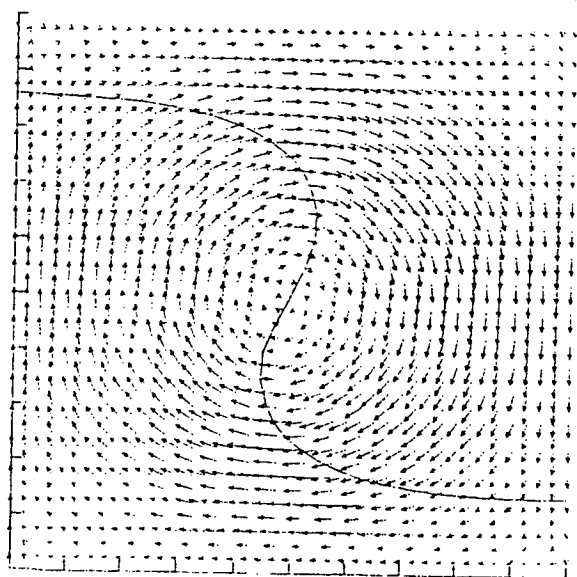
TEMPS $t = 0.205E01$. VITESSE MAX. = 0.229E00

Maillage 10 x 10



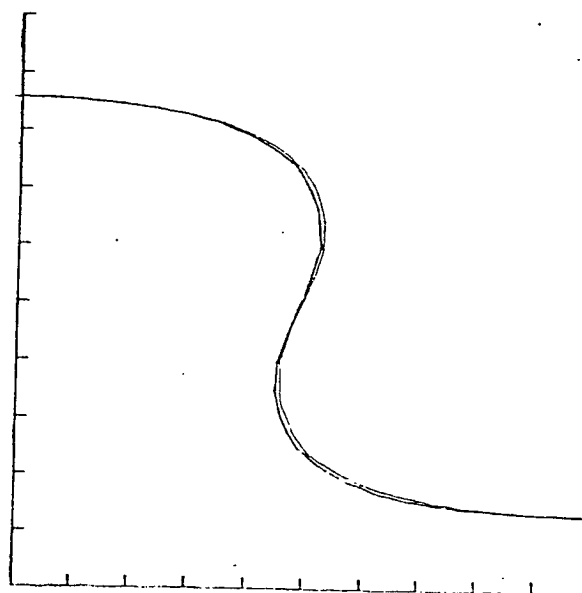
TEMPS $t = 0.205E01$. VITESSE MAX. = 0.226E00

Maillages 15 x 15



TEMPS $t = 0.205E01$. VITESSE MAX. = 0.225E00

Maillage 20 x 20



TEMPS $t = 0.200E01$. VITESSE MAX. = 0.225E00

Comparaison des interfaces
Maillages 15 x 15 et 20 x 20

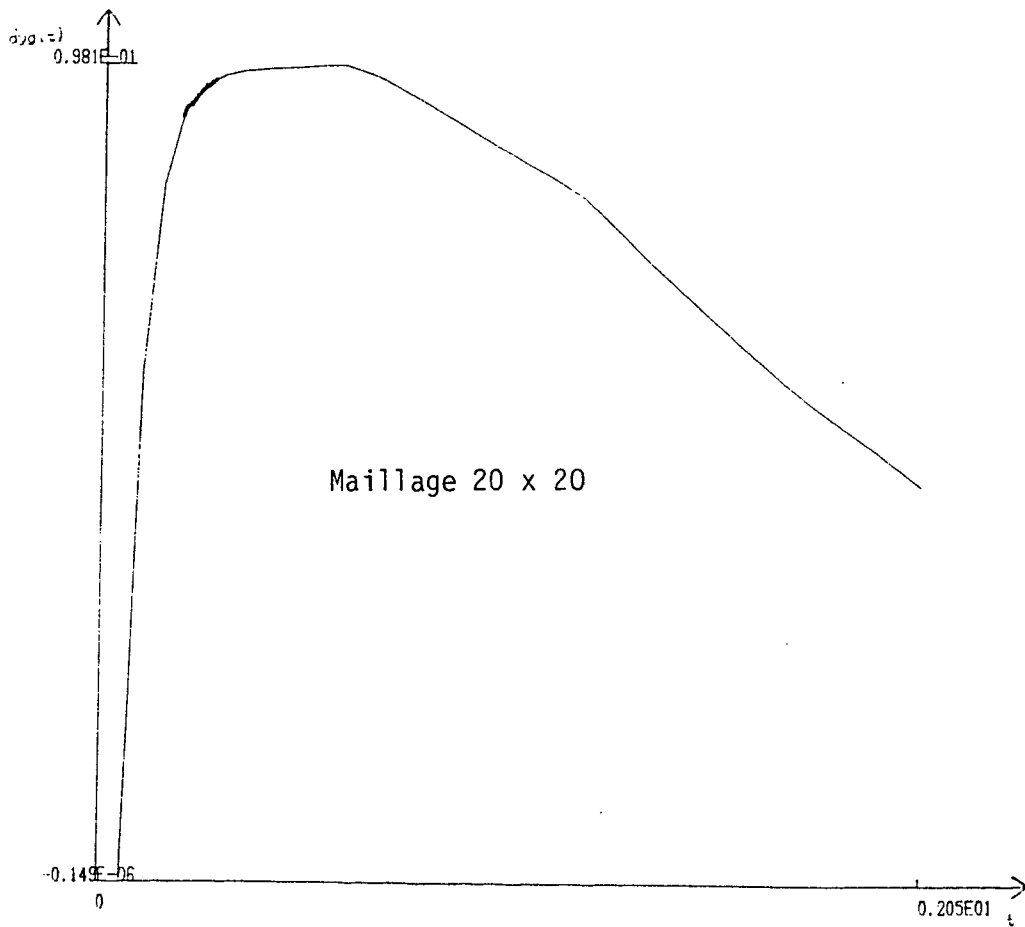
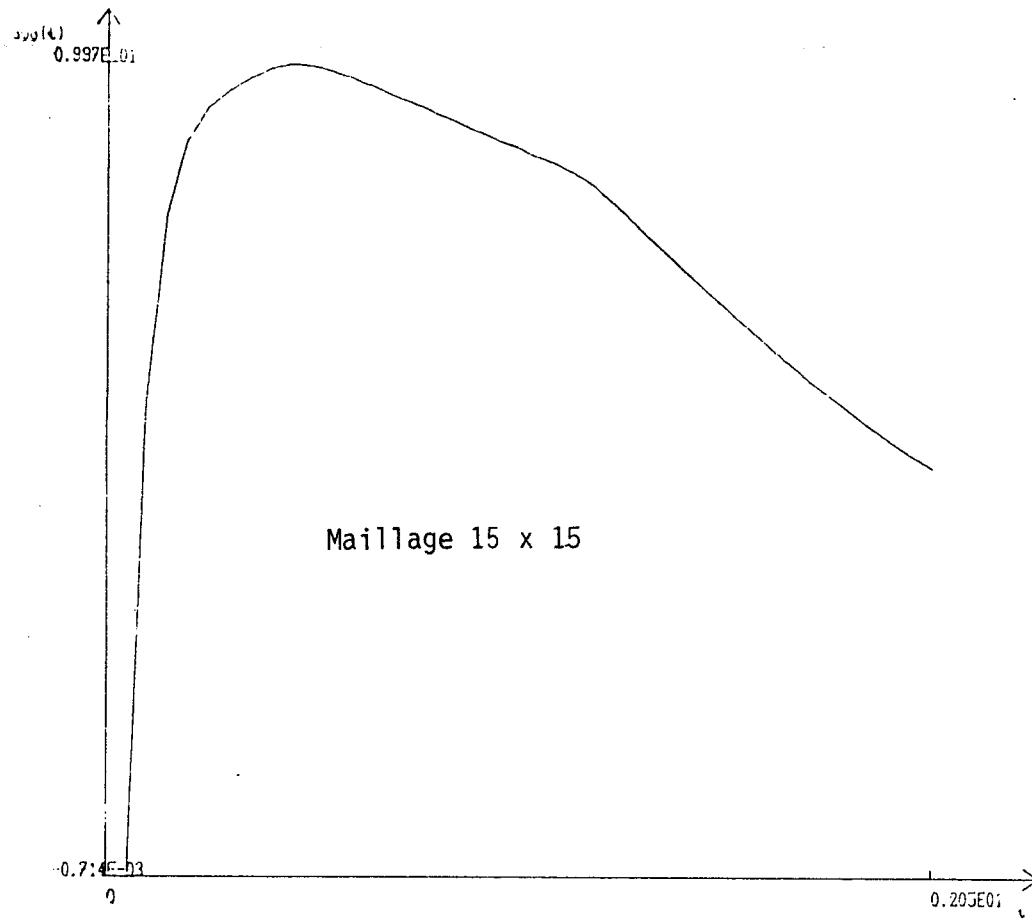


Figure 5.3
Vitesse des pointes

5.3. Vitesses asymptotiques.

Nous voulons mettre en évidence l'existence de vitesses asymptotiques pour les deux pointes. Nous avons les données

$$\rho_1 = 1. \quad , \quad \rho_2 = 0.1$$

$$v_1 = v_2 = 1.$$

Les vitesses initiales sont nulles et l'interface initiale est une sinusoïde, les dimensions de la boîte sont π et 6π ; le temps est de 35 s.

Nous avons pris un maillage 10×30 uniforme.

La configuration finale est présentée en Figure 5.4.

La conservation du volume est vérifiée avec une précision de l'ordre de celle de la machine, 0,05% après 140 pas de temps (les calculs sont faits en simple précision), mais nous constatons de fortes oscillations de la vitesse des pointes qui nous font conclure que dans l'état actuel de l'approximation en pseudo-densité, qui est a priori moins précise que celle en vitesse puisqu'il y a beaucoup moins de degrés de liberté, il ne faut pas observer la vitesse de son isovaleur zéro.

Pour apprécier le comportement asymptotique, nous avons introduit les calculs suivants :

- Calcul d'une projection P_1 conforme de la vitesse (suivant le produit scalaire L^2)
- Déplacement vertical d'une particule sur chaque pointe à l'aide de cette projection conforme.

L'approximation continue de cette vitesse est suffisamment peu chahutée -surtout la composante verticale (Figure 5.5) - pour que le calcul ainsi réalisé soit précis et stable.

De fait nous constatons que l'évolution des deux particules est régulière et près proche de l'évolution des pointes : nous les comparons pour la pointe gauche dans la Figure 5.6.

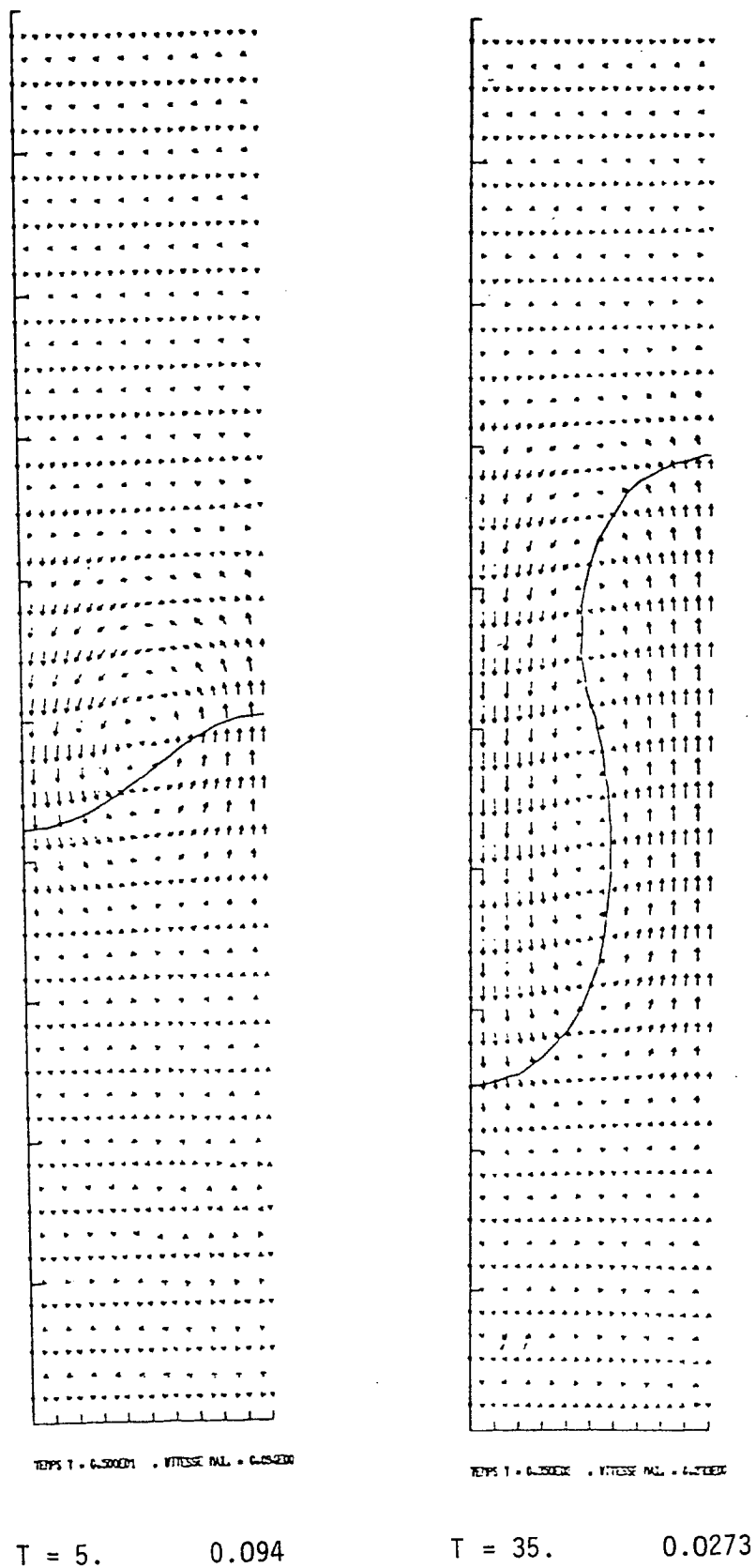


Figure 5.4

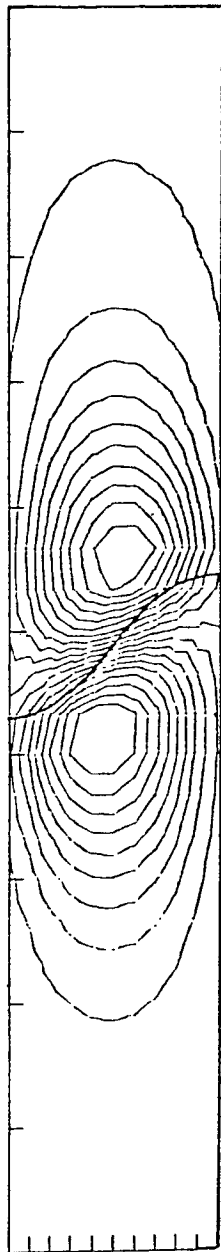
L'approximation continue de cette vitesse est suffisamment peu chahutée - surtout la composante verticale (Figure 5.5) - pour que le calcul ainsi réalisé soit précis et stable.

De fait, nous constatons que l'évolution des deux particules est régulière et très proche de l'évolution des pointes : nous les comparons pour la pointe gauche dans la Figure 5.6.

La Figure 5.7 présente les vitesses de ces deux particules ; nous observons de légères oscillations qui sont sans doute dues à la diffusion de masse qui résulte de l'intégration sur chaque élément (le nombre d'Atwood est 0.92). Toutefois, ces courbes permettent de constater et de mesurer des vitesses asymptotiques qui sont environ de :

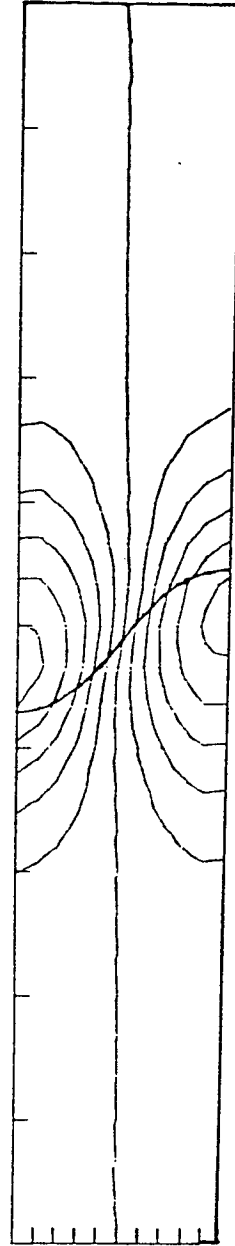
0,139 pour la pointe gauche (descendante)

0,135 pour la pointe droite (ascendante)



TEMPS $t = 0.875E01$. VITESSE MAX. = 0.114E00

Vitesse horizontale



TEMPS $t = 0.875E01$. VITESSE MAX. = 0.114E00

Vitesse verticale

Figure 5.5

Isovaleurs des composantes de la projection continue de
la vitesse.

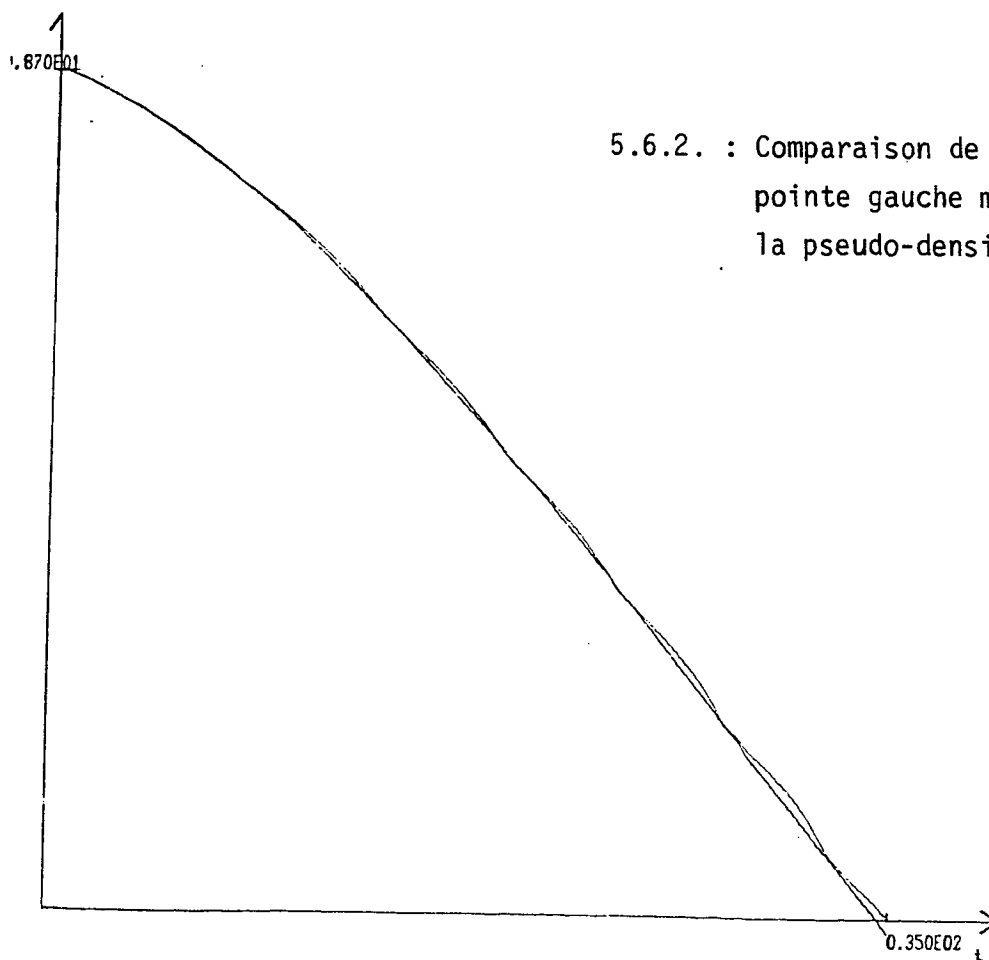
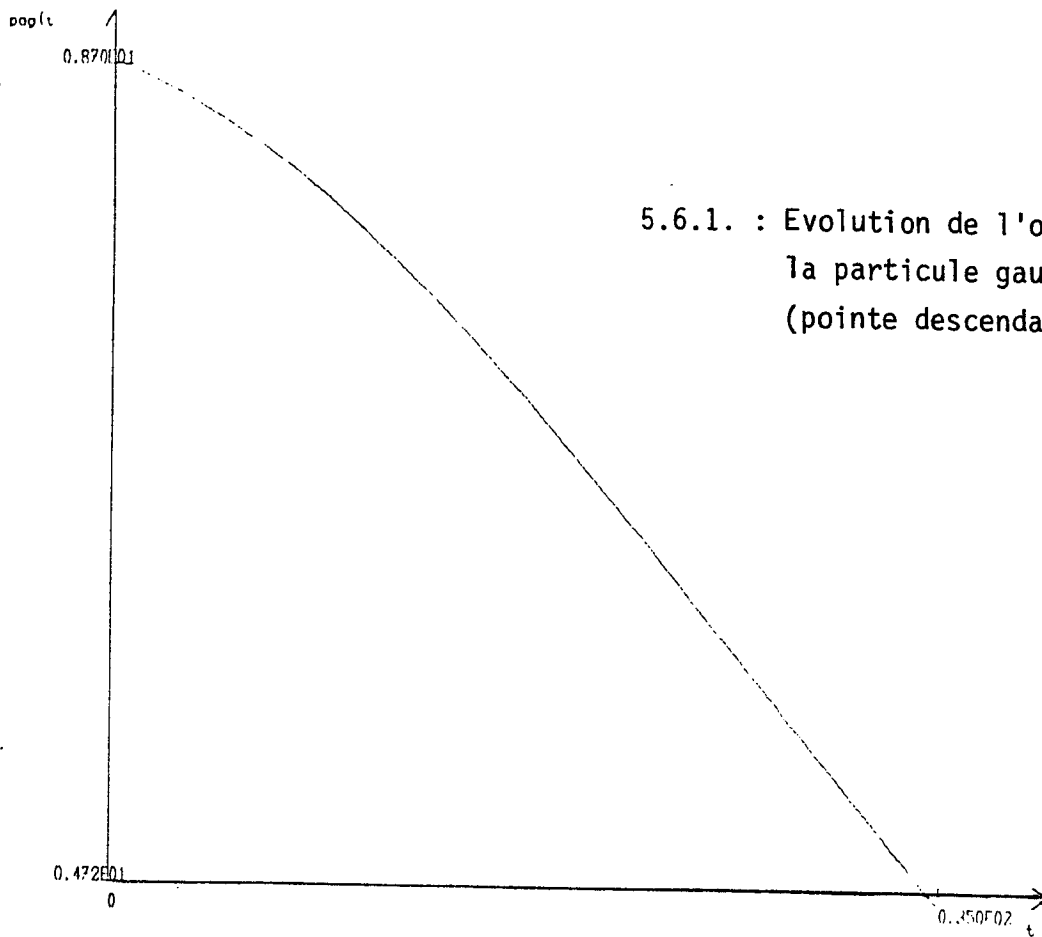


Figure 5.6

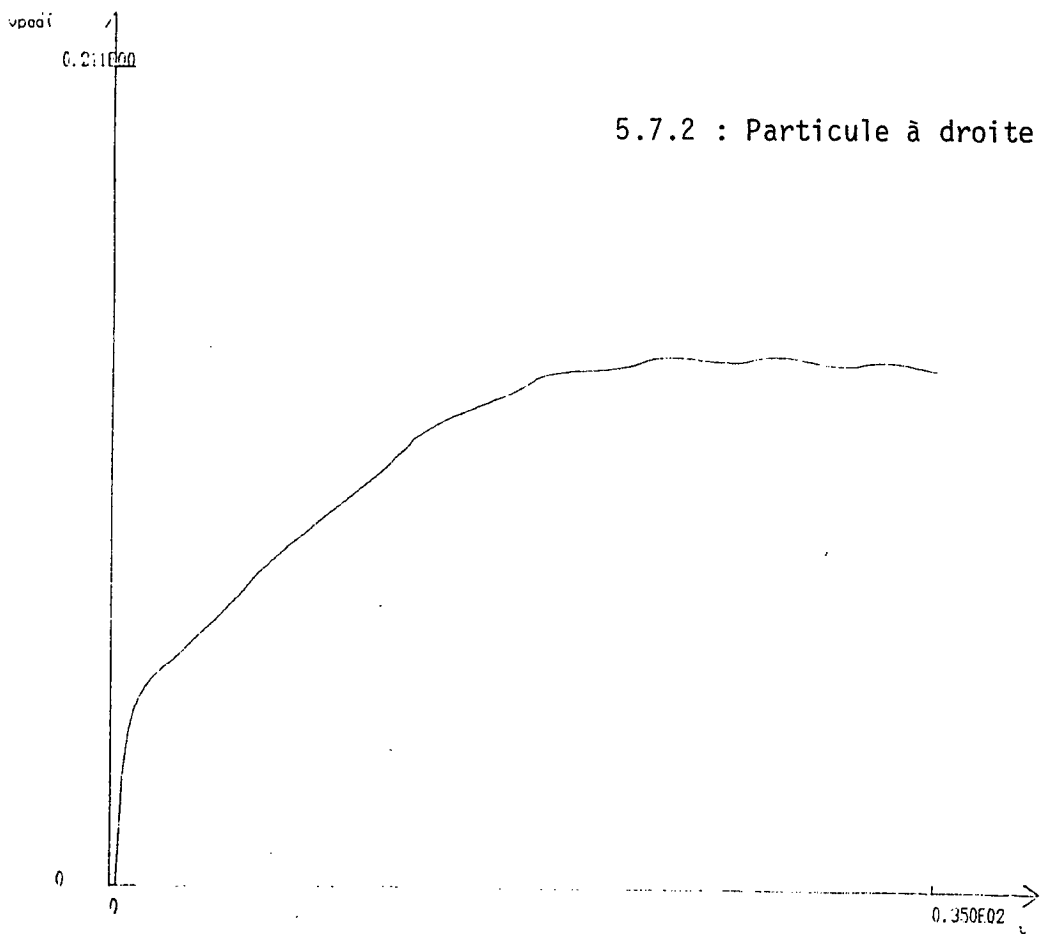
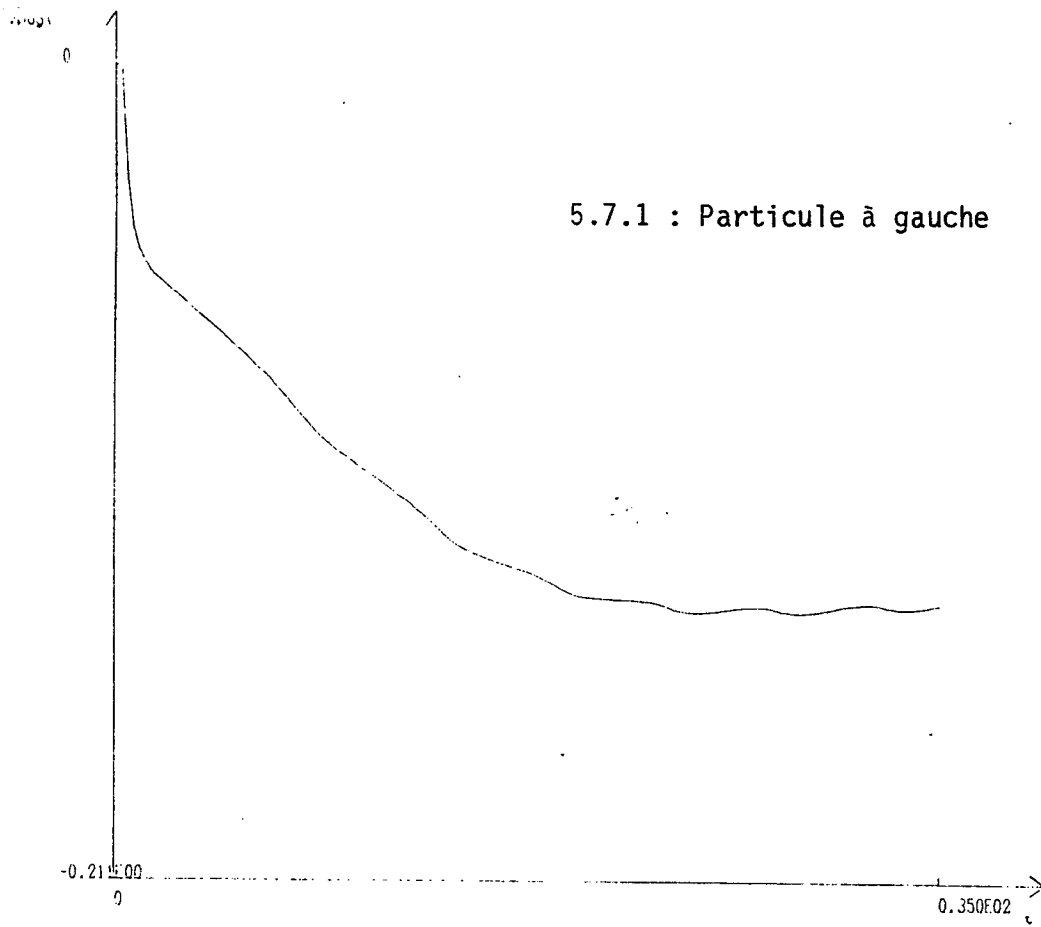


Figure 5.7 : Vitesse (verticale) des particules

5.4. Ecoulement trifluide

La possibilité de simuler un écoulement avec trois fluides, en plus de son intérêt intrinsèque, permet de mieux simuler certains écoulements à deux fluides où interviennent des pincements prévisibles à priori (grâce à une distinction fictive entre deux phases identiques).

Dans une boîte $\pi \times 3\pi$ nous avons considéré trois fluides localisés comme l'indique la Figure 5.8, où AB est la sinusoïde d'équation

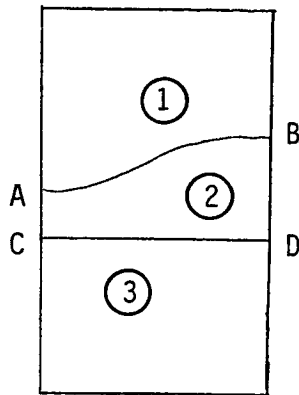


Figure 5.8

$y + 0.5 \cos x - 3.995 = 0$ et CD le segment $y = \pi$; les caractéristiques physiques des fluides sont les suivantes :

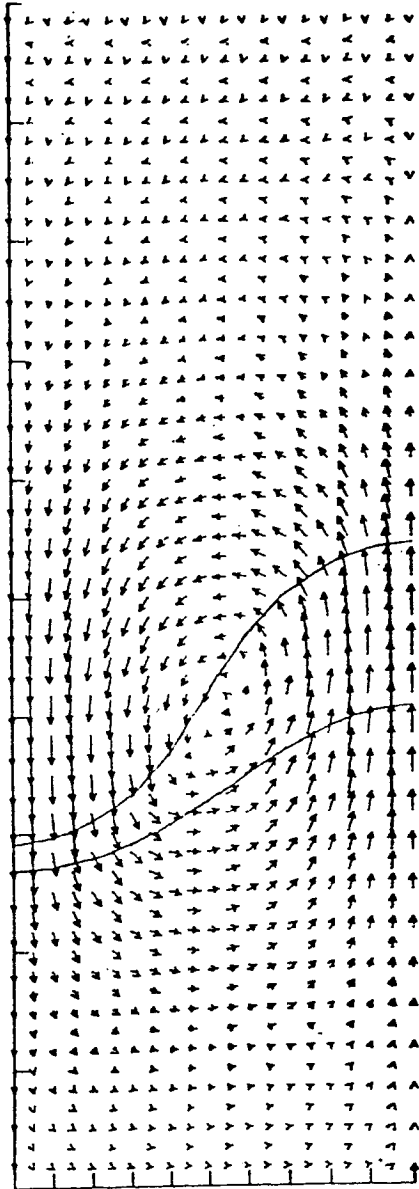
$$\rho_1 = 1. \quad \rho_2 = 0.1 \quad \rho_3 = 0.1$$

$$v_1 = 0,5 \quad v_2 = 0,2 \quad v_3 = 0,5$$

la gravité est de 10m/s^2 ; le maillage est de 10×30 soit 600 triangles.

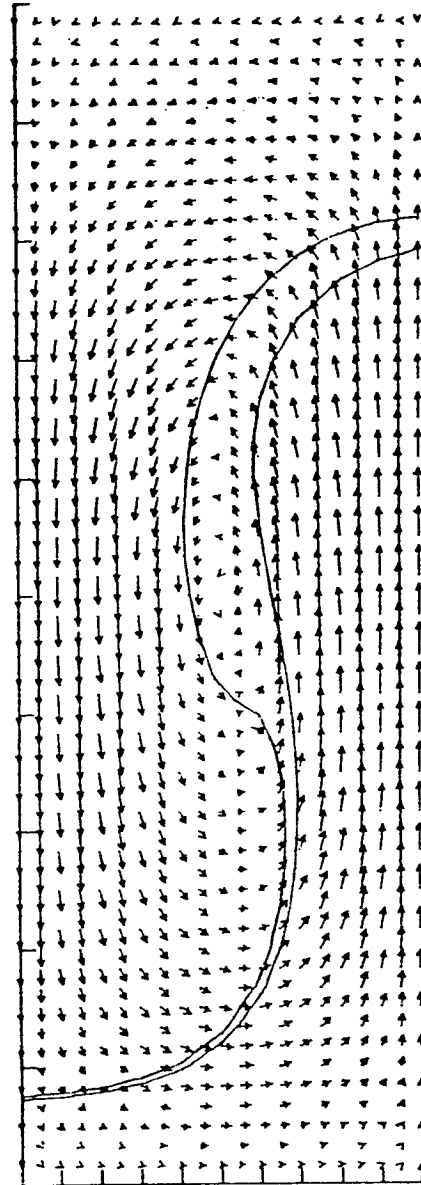
Au bout de 15 secondes, les masses ont varié d'environ 0,3% (Figures 5.9 et 5.10).

Nous distinguons nettement la borne où le fluide médian est pincé par la pointe descendante.



TEMPS $t = 0.500E+1$, VITESSE MAX. = $0.287E+0$

Figure 5.9



TEMPS $t = 0.150E+2$, VITESSE MAX. = $0.550E+0$

Figure 5.10

5.5. Ecoulement dans un cylindre rotatif

Cette simulation illustre la grande adaptabilité du code à des géométries spéciales.

On considère à l'instant initial un cylindre infiniment long rempli par deux fluides de densités différentes répartis suivant l'équilibre stable physique : l'interface est le diamètre horizontal, le fluide le plus lourd étant en bas.

A l'instant δt (δt très petit) la paroi du cylindre est mise en rotation avec une vitesse désormais uniforme ; l'écoulement est supposé plan.

Les données physiques :

Les deux fluides sont très visqueux, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$; les densités sont respectivement de 1. et 0.1 pour une gravité de 1. ; le rayon du cylindre est de 1m et la vitesse imprimée à la périphérie de 1m/s.

Les données numériques :

Grâce aux éléments triangulaires, nous avons une triangulation raisonnablement uniforme ⁽¹⁾ : 600 triangles, 1141 degrés de liberté en vitesse, 331 en pseudo-densité ; le pas de temps est de 0.1 seconde et le schéma est implicite pur.

Les résultats :

Ils sont présentés dans les Figures 5.12 à 5.15. Pour $t = 0.5s$ le mouvement a été transmis à l'ensemble de la partie fluide ; l'angle de l'interface au point le plus central est de 14° ; l'effet de la gravité n'est pas sensible.

Pour $t = 1.s$ l'angle en question fait 19° . Entre les instants $t = 1.5s$ et $t = 2.s$, l'interface est à peu près immobile dans la zone centrale (avec un angle de $17,5^\circ$) ; des mouvements de convection internes à chaque fluide sont observés ; par conséquent l'effet de la gravité est évident ; son antagonisme avec la rotation périphérique produit une phase stationnaire dans le mouvement au centre de l'interface. L'approximation de l'interface résiste bien dans la zone centrale où les mouvements des deux fluides sont de sens opposés et assez bien dans la zone périphérique où se produisent des tourbillons.

⁽¹⁾Figure 5.11.

6. - PRESENTATION DE DEUX METHODES DE DECENTRAGE

Les méthodes de décentrage en éléments finis sont depuis quelques années l'objet de nombreux travaux ; voir la bibliographie de F. THOMASSET [2].

En ce qui concerne les applications concrètes à court terme, on ressent le besoin de méthodes simples, robustes et surtout adaptables à des codes déjà existants.

Dans ce rapport, nous nous intéressons à deux classes d'éléments P_1 , l'une conforme, l'autre non conforme, pour lesquelles un décentrage reposant sur la discontinuité de l'inconnue ⁽¹⁾ est soit impossible soit inefficace.

Les deux décentrages que nous décrivons ici sont d'ordre un et leur construction a été guidée par un critère de positivité pour les problèmes scalaires :

le premier schéma repose sur la décomposition du vecteur vitesse sur les côtés du triangle.

le second schéma est une adaptation assez simple à l'élément non conforme du schéma de M. TABATA [1].

Nous donnons quelques résultats numériques ; pour des résultats ou des indications sur la convergence de ces méthodes, nous renvoyons à P.A. RAVIART [2], M. TABATA [1,2].

6.1. Décentrage par décomposition de la vitesse

La première méthode que nous présentons se caractérise par sa simplicité ; sa conception a été guidée par le seul souci d'obtenir, lors du calcul dans chaque triangle du terme de convection, des contributions qui conduisent à un système vérifiant une condition de positivité ; elle généralise le schéma aux différences décentré à une dimension, que l'on retrouve dans le cas particulier où un des côtés de l'élément est parallèle à la vitesse.

⁽¹⁾ Du type de celui introduit par P. LESAIN [1].

6.1.1. Vitesse parallèle à un côté ; cas conforme

Nous supposons la vitesse \vec{u} constante et égale à \vec{u}_T dans le triangle $T = ABC$ et nous nous proposons de calculer l'intégrale

$$(6.1) \quad I_T = \int_T \psi \vec{u}_T \cdot \vec{\nabla} \phi \, dx \, dy$$

où ϕ et ψ sont des fonctions P_1 continues.

$$(6.2) \quad \begin{cases} \phi = \sum_k \phi(k) \rho_k \\ \psi = \sum_k \psi(k) \rho_k \end{cases}$$

ρ_k désignant la fonction de base P_1 continue correspondant au sommet k .

Nous faisons l'hypothèse suivante (cf. Figure 6.1)

$$(6.3) \quad \vec{u}_T = \lambda \vec{AB} \quad (\lambda \neq 0)$$

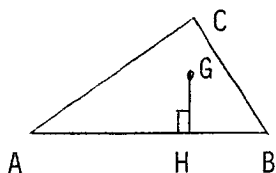


Figure 6.1.

alors l'approximation standard (intégration exacte - schéma centré) donne la contribution suivante :

$$(6.4) \quad I_T = \text{aire}(T) \lambda \|AB\| \frac{\phi(B) - \phi(A)}{\|AB\|} \left(\frac{\psi(A) + \psi(B) + \psi(C)}{3} \right)$$

Le dernier facteur n'est autre que la valeur de ψ au centre de gravité g du triangle ; remplaçons cette valeur par une autre valeur de ψ dans T :

$$(6.5) \quad \begin{cases} I_T^\mu = \text{aire}(T) \lambda \|AB\| \frac{\phi(B) - \phi(A)}{\|AB\|} \sum_{i=A,B,C} \mu_i \psi(i) \\ \mu = (\mu_A, \mu_B, \mu_C), \quad \sum_{i=A,B,C} \mu_i = 1, \mu_i \in [0,1]. \end{cases}$$

Le principe est donc proche de celui de T.J.R. HUGUES [1] ; nous faisons une intégration numérique exacte pour les fonctions P_0 .

Comment choisir μ ? Le critère le plus fiable à l'ordre 1 étant la positivité, nous voulons que l'intégrale I_T^μ contribue à la formation d'une M-matrice (a_{ij}) , c'est à dire que (a_{ij}) doit satisfaire (voir par exemple P.A. RAVIART [2]) le critère suivant :

$$(6.6) \quad \sum_j a_{ij} > 0 \quad \forall i ; a_{ij} \leq 0 \text{ si } i \neq j.$$

Le seul choix possible (en tolérant l'égalité dans la première condition) est donc le suivant :

$$(6.7) \quad \mu^* = \begin{cases} (1,0,0), \text{ c.a.d. } \sum \mu_i \psi(i) = \psi(A) \text{ si } \lambda < 0 \\ (0,1,0), \text{ c.a.d. } \sum \mu_i \psi(i) = \psi(B) \text{ si } \lambda > 0. \end{cases}$$

Donc pour décentrer "amont" le calcul de la dérivée de ϕ , nous décentrons "aval" la fonction test ψ (nous choisissons entre A et B le sommet "aval" par rapport à la vitesse).

Soit H la projection orthogonale de G sur AB ; alors, en supposant par exemple λ positif, l'erreur introduite par l'approximation de I_T par $I_T^{\mu^*}$ s'écrit :

$$(6.8) \quad \begin{cases} I_T - I_T^{\mu^*} = \\ \text{aire}(T) \lambda \|AB\| \frac{\phi(B) - \phi(A)}{\|AB\|} \left\{ \|GH\| \frac{\psi(G) - \psi(H)}{\|GH\|} + \|HA\| \frac{\psi(H) - \psi(A)}{\|HA\|} \right\} \end{cases}$$

Cette expression met en évidence les viscosités numériques transversales et longitudinales à la vitesse ainsi introduites ; d'une manière générale, cette viscosité est de l'ordre de $\|\vec{u}\| h$, où h est le plus grand diamètre de triangle, ce qui peut être relativement important ; d'où l'intérêt de chercher à construire une approximation mixte centrée-décentrée.

Une telle construction est possible triangle par triangle en prenant en compte un nombre de Péclet (diffusion-connection) ou de Reynolds (Navier-Stokes) local défini par un triangle : il suffit de choisir un barycentre entre $\mu^0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et μ^* (et non pas entre les deux valeurs de μ^*) ; la théorie unidimensionnelle du décentrage "optimal" (voir par exemple F. THOMASSET [2]) semble ici pertinente en ce qui concerne le décentrage longitudinal.

6.1.2. Vitesse parallèle à un côté ; cas non conforme

Cette fois nous avons :

$$(6.9) \quad \begin{cases} \phi = \sum \phi(k) f_k \\ \psi = \sum \psi(k) f_k \end{cases}$$

où (f_k) est la base P_1 non conforme à degrés de liberté sur les milieux des côtés des triangles (M. CROUZEIX, P.A. RAVIART [1]) : $\phi(k)$ et $\psi(k)$ sont donc des valeurs de ϕ et ψ aux milieux des côtés ; nous faisons encore l'hypothèse (6.3), que nous écrivons (Figure 6.2)

$$(6.10) \quad \vec{u}_T = \lambda^i \vec{\alpha\gamma}$$

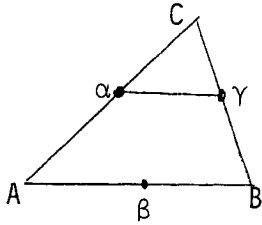


Figure 6.2

L'intégrale (6.1) s'écrit

$$(6.11) \quad I_T = \text{aire}(T) \lambda^i \|\alpha\gamma\| \frac{\phi(\alpha) - \phi(\gamma)}{\|\alpha\gamma\|} \left(\frac{\phi(\alpha) + \phi(\beta) + \phi(\gamma)}{3} \right).$$

et nous l'approchons par

$$(6.12) \quad I_T^{\mu^*} = \text{aire}(T) \lambda^i \|\alpha\gamma\| \frac{\phi(\gamma) - \phi(\alpha)}{\|\alpha\gamma\|} \sum_{i=\alpha,\beta,\gamma} \mu_i^* \psi(i)$$

avec

$$(6.13) \quad \mu^* = \begin{cases} (1,0,0) & \text{si } \lambda < 0 \\ (0,1,0) & \text{si } \lambda > 0. \end{cases}$$

Les remarques du paragraphe précédent se recopient sans grand changement.

6.1.3. Décomposition de la vitesse

Si la vitesse \vec{u}_T n'est pas parallèle à un des côtés du triangle T , nous la décomposons suivant ces côtés :

$$(6.14) \quad \begin{cases} \vec{u}_T = \sum \lambda^i \vec{C}_i \\ (\vec{C}_i) = (\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}), \end{cases}$$

et la construction précédente est faite pour chaque $\lambda^i \vec{C}_i$; puisque la viscosité numérique est proportionnelle à λ^i , il est fondamental que les λ^i ne soient pas (inutilement) trop grands ; le critère suivant nous a paru numériquement satisfaisant

$$(6.15) \quad (\lambda^i) \text{ Minimise } \sum |\lambda^i|.$$

6.1.4. Quelques résultats numériques

Nous considérerons le problème de diffusion-convection suivant :

$$(6.16) \quad \begin{cases} \varepsilon \Delta \phi + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi = 1 & \text{dans } \Omega \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases}$$

posé dans le domaine $\Omega =]0,2[\times]0,2[\setminus]0,1[\times]0,1[$
avec les données $\varepsilon = 1/1000$, $\vec{u} = (1,0)$.

Le problème est approché par éléments finis P_1 continus complètement décentrés (paragraphes 6.1.1. et 6.1.3.) et nous comparons les résultats avec ceux obtenus par la méthode de M. TABATA [1,2] (décrite en 6.2.1. ; les deux calculs ont utilisé un programme de M.O. BRISTEAU que nous remercions). Les résultats sont présentés pour quatre maillages dont deux réguliers et deux irréguliers générés automatiquement (Figures 6.3 à 6.6) ; les résultats sont identiques d'une méthode à l'autre pour les grilles régulières ; les deux méthodes ayant une diffusion comparable pour les grilles irrégulières avec un léger désavantage pour la présente méthode, qui induit une viscosité numérique moins uniforme, d'où des isovaleurs plus chahutées (Figures 6.7 à 6.14).

Nous reviendrons sur les mérites respectifs des deux méthodes ; nous devons d'abord montrer comment la méthode de M. TABATA s'adapte au cas non conforme.

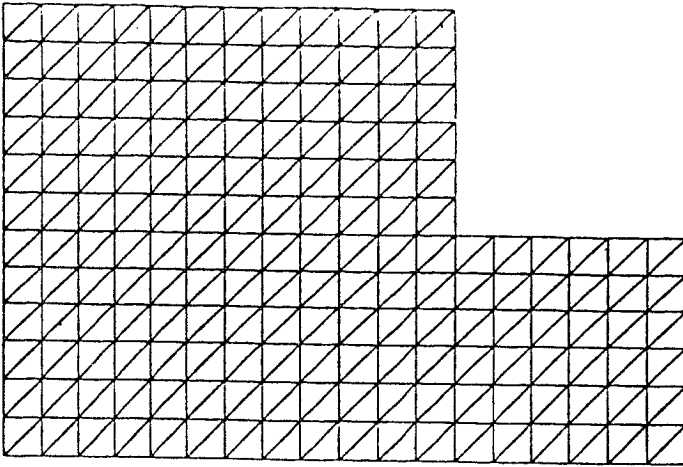


Figure 6.3

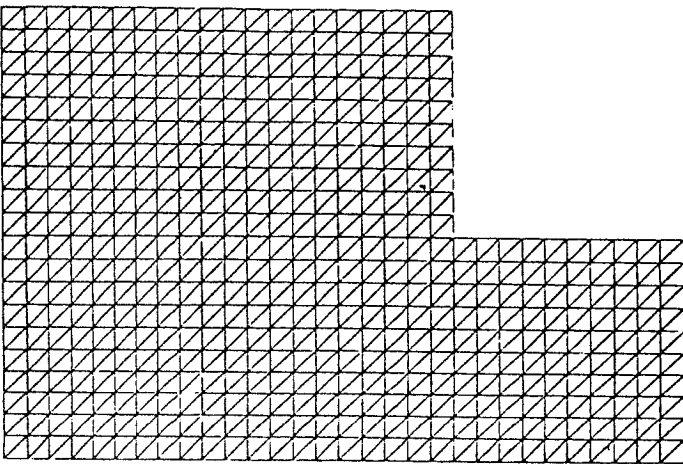


Figure 6.4

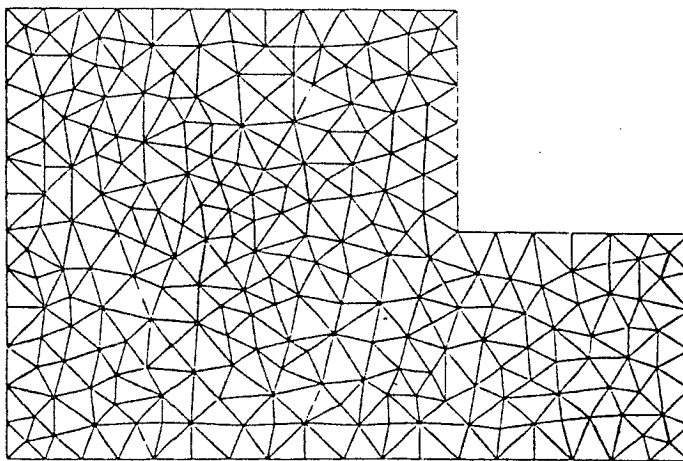


Figure 6.5

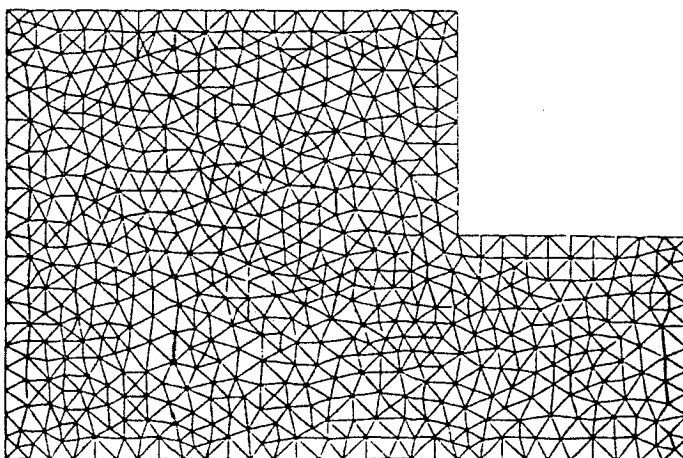
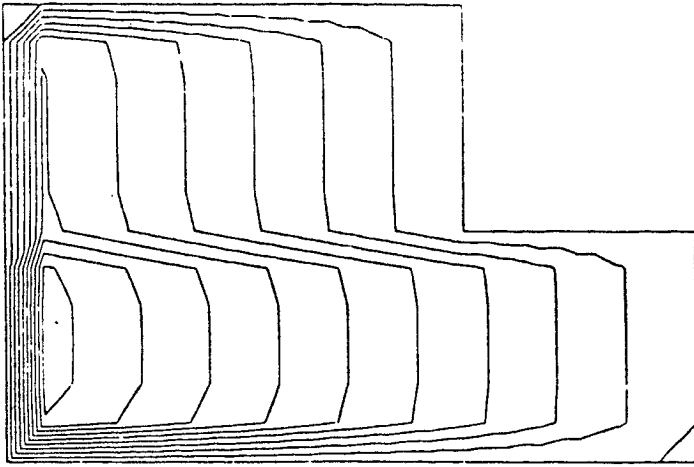
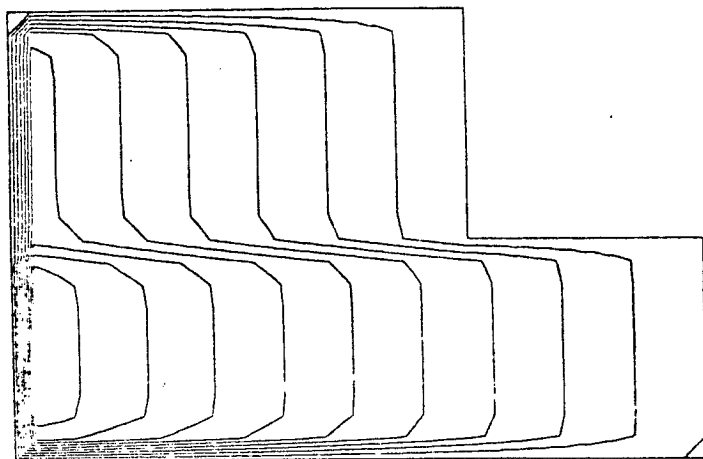
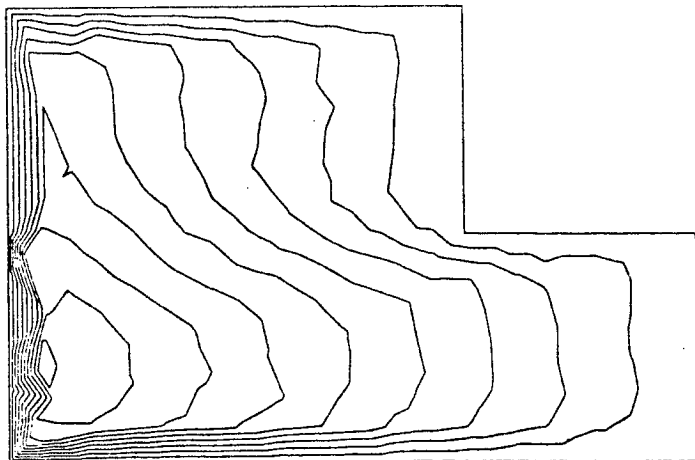
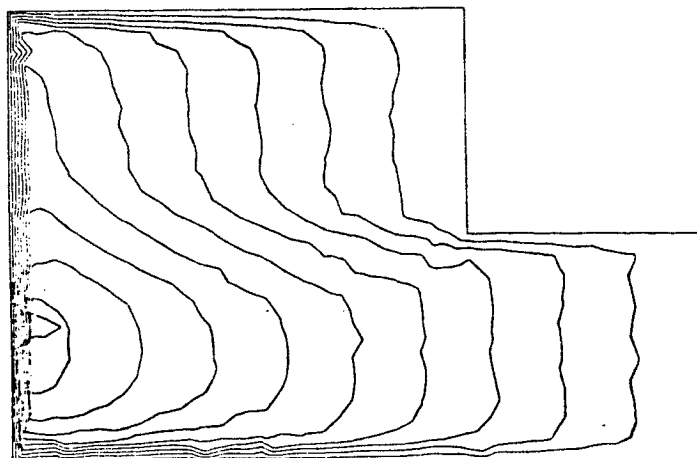


Figure 6.6

Décentrage par décompositionFigure 6.7Figure 6.8Figure 6.9Figure 6.10

Décentrage de M. TABATA

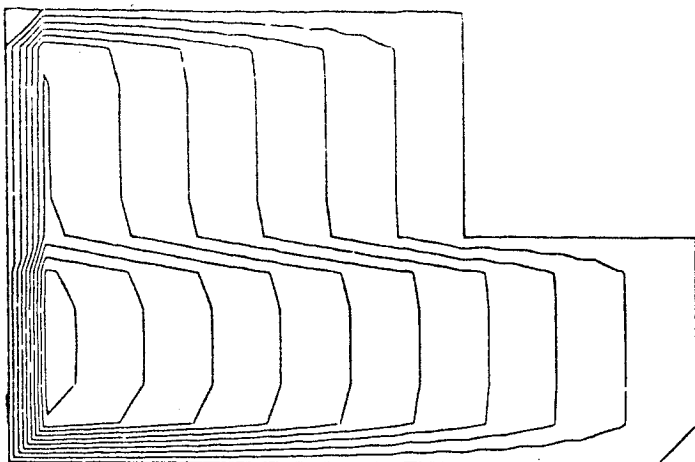


Figure 6.11

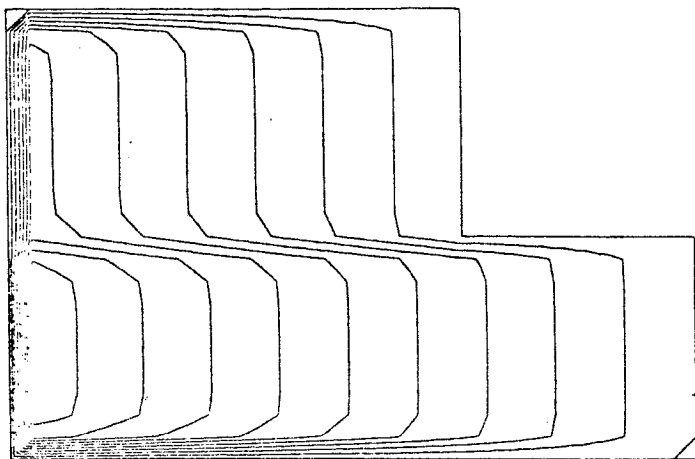


Figure 6.12

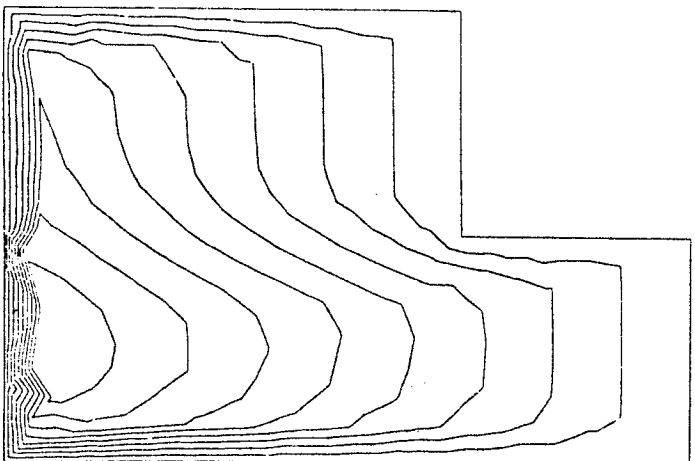


Figure 6.13

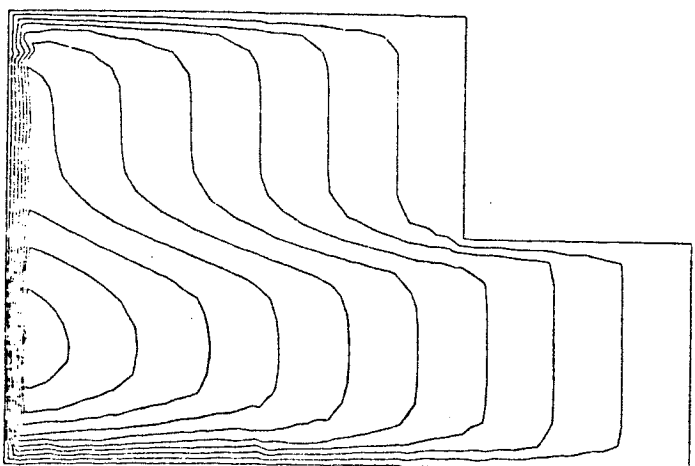


Figure 6.14

6.2. Adaptation du schéma de TABATA

6.2.1. Description du schéma de TABATA

Nous décrirons une approximation par éléments P_1 conformes.

Rappelons brièvement l'approximation d'un terme de transport (ou convection) $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi$ proposé dans l'article de M. TABATA [1] :

- (i) on suppose la vitesse \vec{u} connue au sommet A de la triangulation
- (ii) on calcule le gradient $\vec{\nabla} \phi$ en A : il est choisi égal à $\vec{\nabla} \phi$ dans le triangle amont, c'est à dire celui qui est traversé par le vecteur $-\vec{u}$ attaché à A (Figure 6.15)
- (iii) pour intégrer la forme bilinéaire $\int_{\Omega} \psi \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi \, dx \, dy$, on prend ψ , \vec{u} et $\vec{\nabla} \phi$ constants sur une région $R(A)$ construite autour du sommet A, par exemple, avec les médianes des triangles voisins (Figure 6.16).

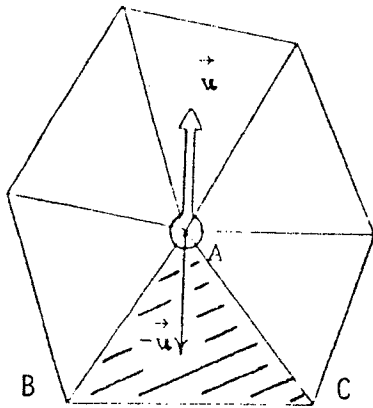



Figure 6.15

 triangle amont
(par rapport au sommet A)

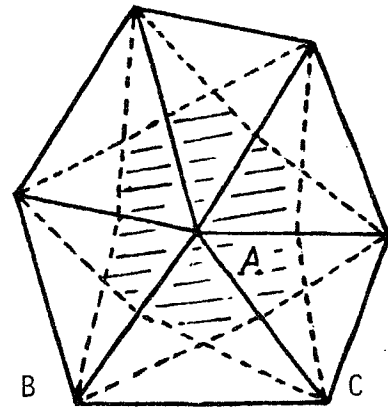



Figure 6.16

 support d'intégration $R(A)$
des fonctions définies en A.

La contribution de l'intégrale $\int_{\Omega} \psi \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi \, dx \, dy$ pour le sommet A s'écrit donc :

$$(6.17) \quad \int_{R(A)} \psi \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi \, dx \, dy \approx \text{mes}(R(A)) \times \psi(A) \times \left\{ u_{AB} \times \frac{\phi(B) - \phi(A)}{\|\vec{AB}\|} + u_{AC} \times \frac{\phi(C) - \phi(A)}{\|\vec{AC}\|} \right\}$$

avec $\vec{u}(A) = u_{AB} \vec{AB} + u_{AC} \vec{AC}$.

Il est clair que u_{AB} et u_{AC} sont négatifs ou nuls de telle sorte que la contribution à la matrice vérifie le critère de positivité (6.6).

Cette propriété assure dans un certain nombre de cas importants que le problème discret vérifie un principe de maximum ; elle est dans tous les cas garantie d'une certaine stabilité : pour plus de détails, nous renvoyons à nouveau à P.A. RAVIART [2], M. TABATA [1,2]. Le schéma (6.17) peut aussi être considéré comme une généralisation du schéma aux différences finies complètement décentré (schéma de GODUNOV ou "Donor Cell").

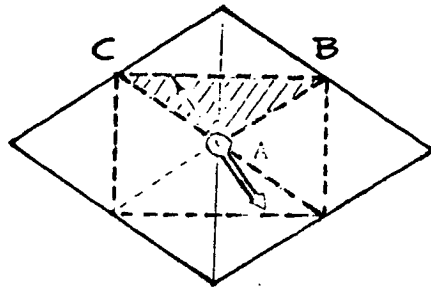
Remarque 6.1 : le schéma précédent ne perturbe pas le profil de la matrice lorsqu'on l'implémente à la place du schéma standard (méthode de Galerkin).

Remarque 6.2 : l'étape (iii) et jusqu'à un certain point l'étape (i) mettent en relief le côté "différences finies" de cette construction. En particulier, la prise en compte d'une vitesse ou d'un coefficient variables nécessite d'en calculer une moyenne sur le support d'intégration $R(A)$, d'où une certaine diffusion qui risque de nuire à la précision ; un recours pourrait consister à utiliser le calcul du gradient de ϕ (étape (ii)) sur les sommets pour intégrer ensuite dans chaque triangle ; dans ce cas, le calcul est nettement plus compliqué et l'on perd la propriété de positivité.

Remarque 6.3 : Etant d'ordre 1, le schéma précédent introduit une importante diffusion numérique que l'on peut mettre en évidence sous la forme de dérivées secondes de ϕ affectées des coefficients proportionnels au pas de discrétisation.

6.2.2. Adaptation au cas non conforme

Considérons des éléments triangulaires linéaires (P_1) définis par leurs valeurs aux milieux des côtés et continus en ces points ; nous allons adapter le schéma de TABATA avec pour souci principal de préserver la positivité : à cet effet, pour chaque milieu de côté A nous construisons une "triangulation auxiliaire" telle que les milieux de côtés de la triangulation initiale deviennent des sommets de la triangulation auxiliaire. Dans le cas général, c'est à dire si A n'est pas sur une frontière, ce milieu est commun à deux triangles (Figure 6.17) ; à partir des cinq milieux de côtés de ces triangles, on peut




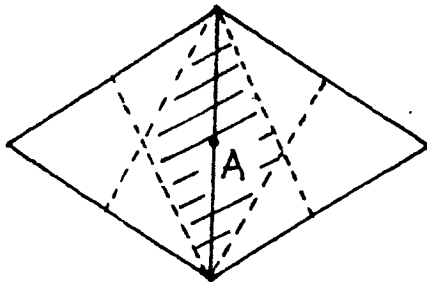
 Triangle amont

Figure 6.17




 Support d'intégration
R(A) des fonctions définies sur A

Figure 6.18

construire quatre triangles auxiliaires ayant pour sommet commun A. Parmi les triangles auxiliaires, on détermine le triangle amont comme au paragraphe 6.2.1. : le gradient de ϕ est alors calculé suivant (6.17), le support d'intégration R(A) autour de A étant défini lui aussi par des découpages des triangles voisins : dans la Figure 6.18, nous utilisons les médianes des deux triangles voisins.

Dans ces conditions la propriété de positivité est vérifiée.

Que deviennent les trois remarques du paragraphe 6.2.1.?

- la remarque 6.3 se recopie intégralement.
- il en est de même pour la remarque 6.1 (au détail près que le schéma standard pour cet élément n'est pas une méthode de Galerkin).

- cela est aussi vrai pour la remarque 6.2 ; le support d'intégration R(A) est a priori moins "ramassé" d'où une diffusion peut être plus importante ; remarquons toutefois la cohérence de cette intégration numérique avec l'élément, dont la matrice de masse est diagonale.

6.2.3. Problèmes géométriques

Nous discutons ici des remèdes à apporter à deux problèmes liés à la géométrie de la triangulation ou du domaine (conditions au bord).

Problème de l'existence de noeuds "receveurs"

Supposons que nous cherchions à résoudre l'équation de transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0 \\ \phi(x, 0) = \phi_0(x) \end{cases}$$

à l'aide d'un des deux schémas précédents : TABATA P_1 continu, ou bien son adaptation P_1 non conforme ; nous nous proposons d'évaluer l'aptitude de ces schémas à transmettre des informations (valeurs de ϕ) à travers le maillage.

Cette aptitude est prise en défaut dans le contexte suivant :

Plaçons nous d'abord dans le "cas conforme", qui est plus clair et considérons

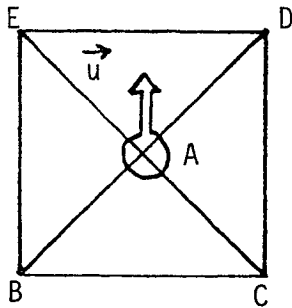


Figure 6.19

le carré BCDE (Figure 6.19) coupé en quatre triangles suivant les diagonales ; la vitesse \vec{u} est parallèle à BE et de même sens ; le triangle BAC étant amont pour le milieu A du carré, ce degré de liberté recevra des contributions des degrés B et C ; par contre (en l'absence d'un terme de diffusion) le degré A ne fournira aucune contribution : ses voisins E et D

ne vont en recevoir que de B et C à cause du parallélisme entre EB et CD d'une part et \vec{u} de l'autre ; disons que les degrés B et C, en étant "strictement amonts" respectivement à E et D, privent A de la possibilité de transmettre l'information qui lui parvient.

Comme on le devine aisément, ce phénomène a de fâcheuses conséquences numériques - mais l'on n'est pas obligé d'utiliser un tel maillage!

Il existe toutefois une manière d'empêcher un tel incident - même local : elle consiste à décomposer préalablement le vecteur \vec{u} suivant deux directions convenablement choisies : non parallèles aux côtés de la triangulation ; à chaque composante un calcul décentré (recherche du triangle amont etc...) du gradient de ϕ .

Considérons maintenant le cas non-conforme :

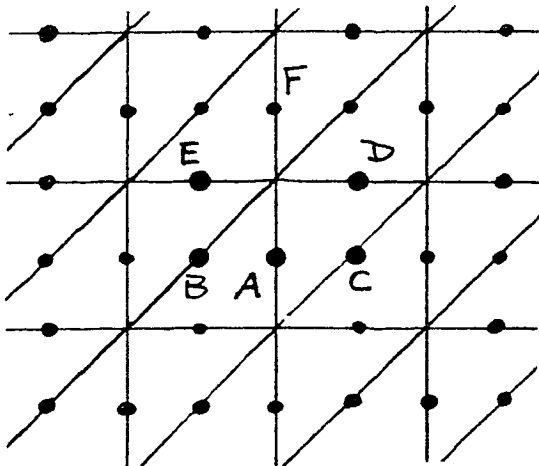


Figure 6.20

le maillage est supposé rectangulaire, les rectangles coupés en deux triangles suivant la première diagonale (Figure 6.20) ; la vitesse est supposée verticale, et donc parallèle à \vec{BE} et \vec{CD} , et de même sens que ces deux vecteurs ; alors le degré A n'a pas de receveur puisque C est "strictement amont" à D (les calculs en E et F n'utilisent pas la valeur en A).

Dans ce cas encore une décomposition préalable du vecteur \vec{u} semble remédier efficacement au problème.

A priori, ce type de procédure augmente la diffusion numérique transversalement à la vitesse ; numériquement, cela ne semble pas trop pénalisant (voir aussi M. TABATA [1] sur ce point).

Problème des conditions au bord :

Ce problème se pose plus spécialement dans le cas non conforme. Le maillage est encore supposé rectangulaire et nous considérons une portion de bord

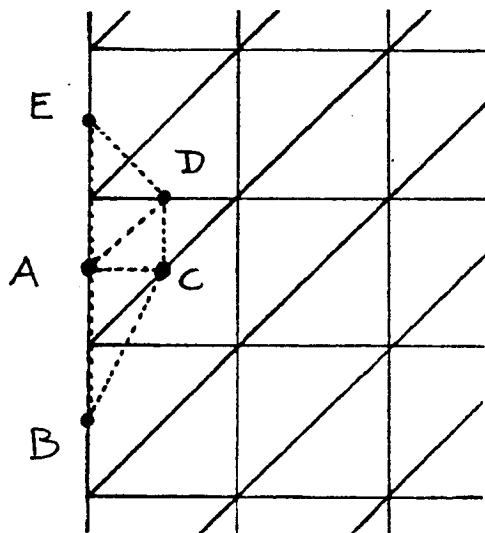


Figure 6.21

verticale. Dans le schéma standard, seuls les degrés A, C et D (Figure 6.21) interviennent dans le calcul du gradient en A ; si par exemple, la vitesse en A est égale au vecteur \vec{AE} , ni C, ni D ne sont en amont de A. Comme il est nécessaire de savoir traiter toute vitesse qui n'est pas strictement rentrante, nous sommes amenés à élargir le choix des triangles auxiliaires en ajoutant les triangles ABC et ADE au triangle ACD.

Les conséquences de ce choix sont les suivantes :

- la positivité est sauvegardée
- la bande de la matrice par contre est perturbée par rapport à l'approximation standard
- les points B et E étant relativement plus éloignés que C et D, la diffusion numérique (longitudinale surtout : prendre $\vec{u} = \vec{AE}$) n'est plus homogène, ce qui peut donner lieu à des défauts - essentiellement qualitatifs - dans les résultats numériques.

Le domaine d'intégration $R(A)$ est naturellement la moitié du domaine du cas intérieur.

6.3. Application de la deuxième méthode à un écoulement multifluide

Afin d'étendre le domaine de validité du code décrit dans les Paragraphes 1 à 5, nous avons utilisé la deuxième méthode de décentrage pour approcher le terme de convection de l'équation en vitesse.

6.3.1. Précisions sur l'implémentation

Les deux adaptations du Paragraphe 6.2.3. sont utilisées ; la présence de la densité comme coefficient en facteur dans le terme de convection nécessite qu'on en choisisse une moyenne sur le support d'intégration $R(A)$ de chaque milieu : nous avons choisi un barycentre des densités calculées dans les deux triangles qui contiennent ce support afin de sauvegarder la cohérence avec la matrice de masse (qui intervient dans la dérivée en temps).

Enfin, le terme de convection est traité implicitement (sauf certains termes aux bords verticaux), ce qui nécessite une "interface" entre les degrés de liberté P_1 non conformes (valeurs aux milieux de côtés) et les degrés de liberté de la base à divergence nulle (vitesses tangentes aux milieux de côtés, fonction courant aux sommets).

6.3.2. Résultats numériques

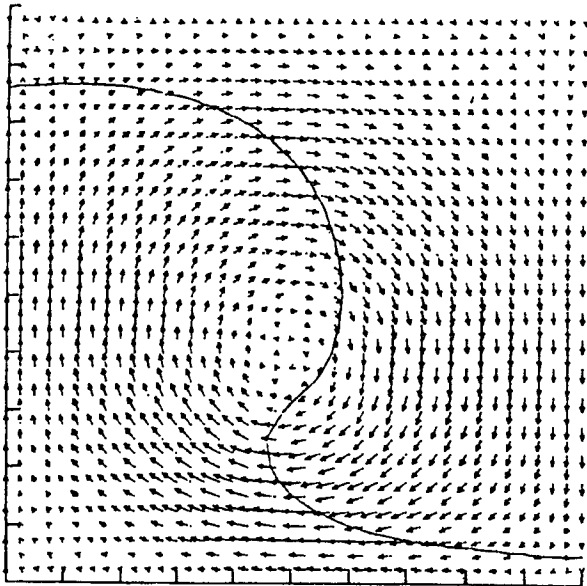
La version décentrée ainsi réalisée est parfaitement stable pour toute valeur de la viscosité, y compris zéro, pour des pas de temps raisonnablement petits.

En fait, la question principale qui se pose est celle de l'importance de la diffusion numérique introduite par le décentrage. Cette diffusion risque de rendre la simulation insensible par rapport à la viscosité physique lorsque celle ci est petite.

Dans les deux essais que nous présentons, on a un carré de côté 1.m, les densités sont 1. et 0.1, la gravité g est de 10 m/s^2 et l'interface initiale est une sinusoïde d'amplitude 0.4 m.

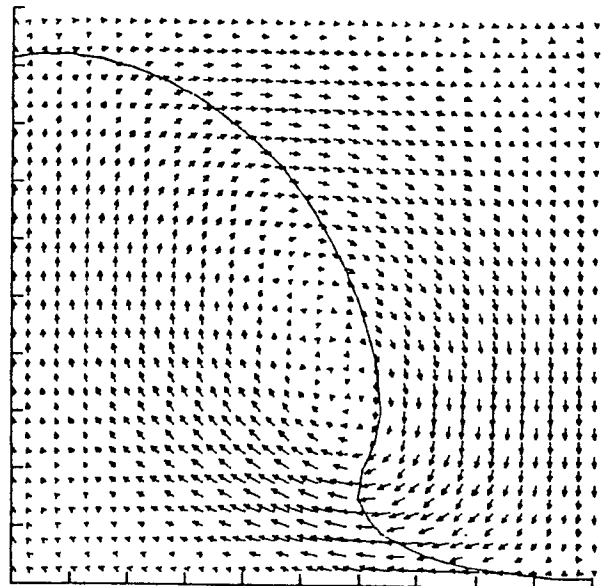
Les vitesses obtenues étant de l'ordre de 0.2 m, avec un maillage de 20×20 , la viscosité numérique peut être évaluée à une fraction de 1/100.

Les Figures 6.22 et 6.23 présentent les résultats de deux simulations avec des viscosités physiques respectives de 1/100 et 1/1000 ; la différence est significative.



TEMPS $t = 0.550600$, VITESSE MAX. = 0.221E01

Figure 6.22 : $\nu = \frac{1}{100}$



TEMPS $t = 0.550600$, VITESSE MAX. = 0.242E01

Figure 6.23 : $\nu = \frac{1}{1000}$

6.4. Conclusion

Nous avons présenté deux schémas d'ordre 1 pour des éléments P_1 :

Le premier schéma a pour avantage sa grande simplicité : cela est vrai pour l'implémentation mais aussi pour le couplage avec le schéma centré (méthode "mixte") avec un paramètre défini localement. Le profil de la matrice n'est pas augmenté.

Le second schéma est légèrement plus compliqué à implémenter ; il ne s'assemble pas par élément ; en particulier, nous ne savons pas construire une méthode "mixte" avec un paramètre local : ce paramètre serait-il défini sur les degrés de liberté ou sur les triangles? Le profil de la matrice n'est pas en général augmenté. Les avantages principaux de ce schéma sont, outre des résultats qualitativement meilleurs, ses capacités d'adaptation et de généralisation : adaptation à des conditions au bord du type glissement, généralisation à l'utilisation de deux triangles amonts (BRISTEAU et al. [1]), généralisation aisée à des schémas en espace-temps.

7.- UNE METHODE D'APPROXIMATION DE LA TENSION INTERFACIALE

La simulation d'effets de tension interfaciale pour des écoulements multifluides non miscibles se heurte à un certain nombre de difficultés tant du point de vue prévisions que du point de vue stabilité ; la majeure partie des publications sur ce sujet fait état de procédés de régularisation de l'interface (fonctions splines etc...).

Ce besoin de régulariser pourrait s'expliquer par le choix d'une approximation de l'interface de degré insuffisant ; cette insuffisance serait toutefois partiellement masquée par le caractère géométrique du couplage interface/vitesses issu de la tension interfaciale.

Le but de ce paragraphe est de montrer comment la méthode de pseudo-densité permet d'écrire une formulation analytique de ce couplage.

Nous présentons aussi quelques résultats numériques.

7.1. Formulation du problème

La tension interfaciale intervient dans la formulation variationnelle en vitesse (paragraphe 1.3) sous la forme d'une intégrale curviligne sur l'interface : le système (1.10) devient

$$\begin{aligned} \vec{u} \in L^2(0,T;V), \text{ assez régulier, } \forall \vec{v} \in L^2(0,T;V), \quad \forall i=1,2 \\ \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} v_i + \rho v_i (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i + \nu \vec{\nabla} u_i \cdot \vec{\nabla} v_i \right\} - dx dy dT = \\ = \int_0^T \int_{\mathcal{L}(t)} \sigma H \vec{n} \cdot \vec{e}_i v_i d\sigma dT \end{aligned}$$

avec $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$, où H est la courbure algébrique de l'interface \mathcal{L} , et σ un coefficient physique relatif aux deux fluides.

Dans une simulation classique, la prise en compte du terme de tension interfaciale va se faire de la manière suivante :

Etape 1 - Après déplacement des fluides (particules, volumes partiels, maillages...) on calcule l'interface.

Etape 2 - A partir de cette interface, on calcule sa courbure, éventuellement en lissant la courbe, qui est souvent une ligne brisée.

Etape 3 - On injecte cette courbure dans le système des vitesses.

La méthode que nous proposons n'utilise pas l'équation de l'interface pour calculer sa courbure ; en effet cette courbure s'exprime directement en fonction de la pseudodensité ϕ :

$$(7.2) \quad \left\{ \begin{aligned} H(x,y) &= \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right\} . \end{aligned} \right.$$

Cette formule définit la courbure de l'isovaleur de ϕ au point courant (x, y) dès que le gradient de ϕ n'y est pas nul. Le problème de l'utilisation d'une interface plus ou moins bien approchée est donc traité à deux niveaux : d'une part nous n'utilisons pas l'interface pour le calcul de la courbure, d'autre part cette courbure est une fonction de x et y : quand nous en prendrons la trace dans l'étape 3, l'imprécision sur la localisation de l'interface n'aura pas de graves conséquences pour la stabilité de l'approximation.

Remarquons enfin que si la pseudo-densité est généralement de gradient non nul près de l'interface (par construction), il est possible toutefois de s'assurer complètement de cette condition via la reinitialisation (paragraphe 2.2.) qui maintiendra $|\text{grad } \phi|$ proche de l'unité.

7.2. Approximation

Nous allons définir les procédures qui à partir d'une approximation ϕ_h P_1 continue de la pseudo-densité ϕ va permettre de calculer les traces de ses dérivées secondes sur l'interface.

Il est clair que ces dérivées secondes ne peuvent être calculées en dérivant ϕ_h , et nous utilisons une méthode d'interpolation présentée (sous une forme légèrement différente de ce qui suit) dans R. GLOWINSKI [] où l'on trouvera des indications sur la précision de type d'interpolation :

Pour calculer une dérivée seconde $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} (S)$ ($x_1, x_2 = x$ ou y) sur un sommet S de la triangulation, nous poserons

$$(7.3) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} (S) \approx - \left\{ \int_{\Omega} \psi_S \, dx \, dy \right\}^{-1} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_S}{\partial x_2} \, dx \, dy \right\}$$

où ψ_S est la fonction de base attachée à S :

ψ_S est P_1 continue

$\psi_S(S) = 1, \psi_S(S_i) = 0$ si $s_i \neq S$.

De même, pour les dérivées premières, nous prendrons :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} (S) \approx \left\{ \int_{\Omega} \psi_S \, dx \, dy \right\}^{-1} \left\{ \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \psi_S \, dx \, dy \right\}.$$

Les différentes dérivées peuvent donc être ainsi interpolées en chaque milieu de segment de l'interface : nous en déduisons la valeur de la courbure en ces points ; nous intégrons le second membre de (7.1) à l'aide de cette valeur (la courbure étant donc assimilée à une constante sur chaque segment. Le vecteur normal \vec{n} est lui aussi calculé à partir du gradient de ϕ .

7.3. Résultats numériques

Nous présentons un essai sur un problème "académique" qui donne une idée d'une part de la précision du calcul de la courbure et d'autre part de sa stabilité.

Pour des essais sur un problème industriel, nous renvoyons à B. LEGAIT [1].

Dans la boîte périodique et symétrique du problème de l'instabilité de Taylor (paragraphe précédents) de dimension $0.3 \times 1.$, on considère deux fluides initialement au repos, ayant pour caractéristiques mécaniques

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 1. & v_1 &= 1. \\ \rho_2 &= .1 & v_2 &= 1. \\ \delta &= 1.\end{aligned}$$

Les deux fluides sont initialement répartis comme dans la figure 7.1., l'interface étant définie par deux arcs de cercles, de rayon $R = 0.185$ ($H = 5.405405\dots$) et de centres respectifs

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= (0., 0.340) \\ (x_2, y_2) &= (0., 0.660).\end{aligned}$$

La présence d'un angle (d'ailleurs assez aigu) va permettre de tester l'aptitude du code à recouvrer une surface régulière : la configuration finale est théoriquement constituée par un seul disque, les liquides étant supposés non soumis à la gravité.

Hormis ces points, le code est identique à celui décrit aux paragraphes 1 à 5.

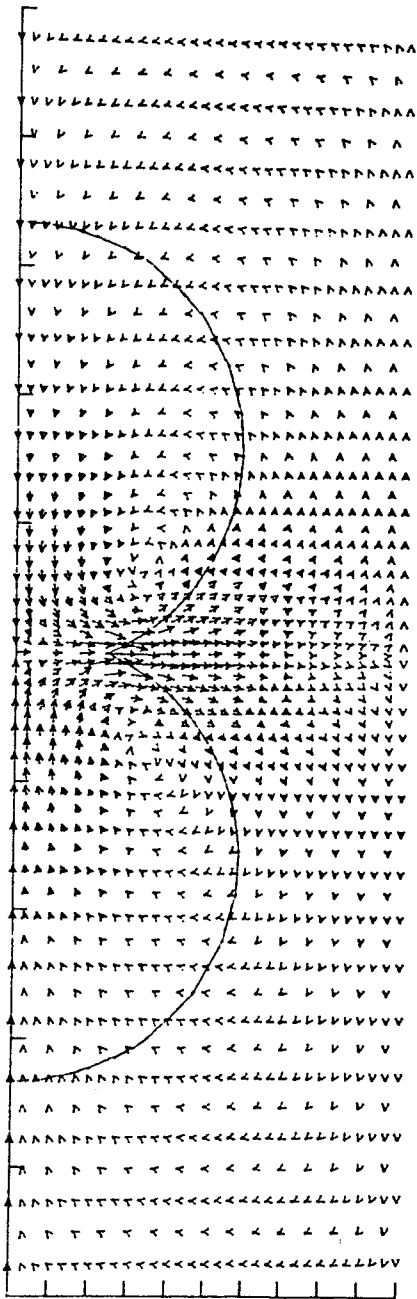
Le maillage est de 15×30 rectangles, soit 900 triangles (496 inconnues pour ϕ , 1771 pour \vec{u}), raffiné pour les ordonnées proches de 0.5 ; le pas de temps est de 0.02 pour le début du processus (10 fois plus grand après). La pseudo-densité est "réinitialisée" à chaque pas de temps (paragraphe 2.2).

Le choix d'arcs de cercles permet dans un premier temps de contrôler la précision du calcul de la courbure :

la pseudo-densité initiale est donnée aux sommets du maillage par l'expression

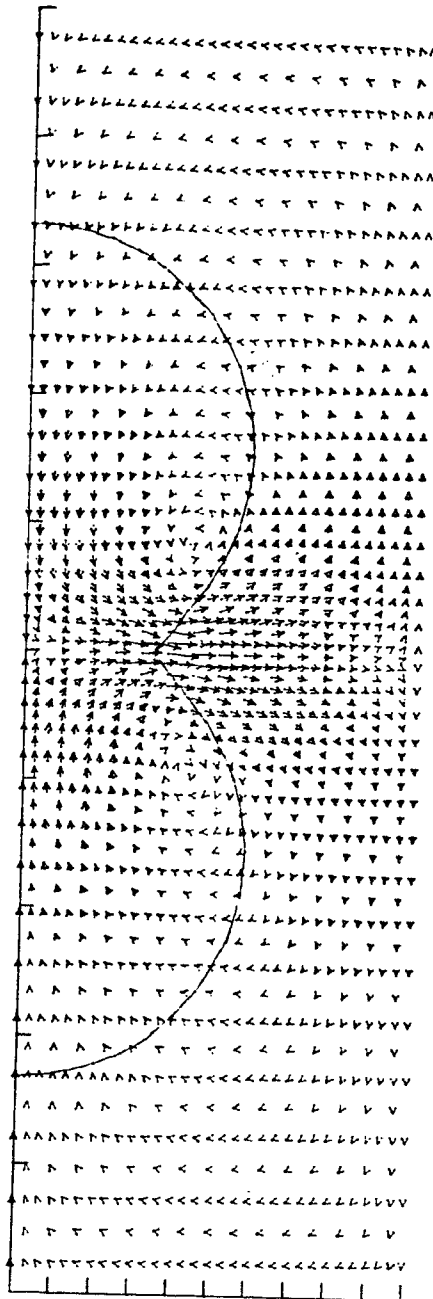
$$\phi(x,y) = \text{Min}_{i=1,2} \{ (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 - R^2 \},$$

interpolée linéairement puis réinitialisée aux sommets par la distance à l'isovaleur zéro de l'interpolée ; cette réinitialisation est elle-même interpolée linéairement, et on calcule la courbure via la méthode précédente à partir de la fonction P_1 continue ainsi obtenue.



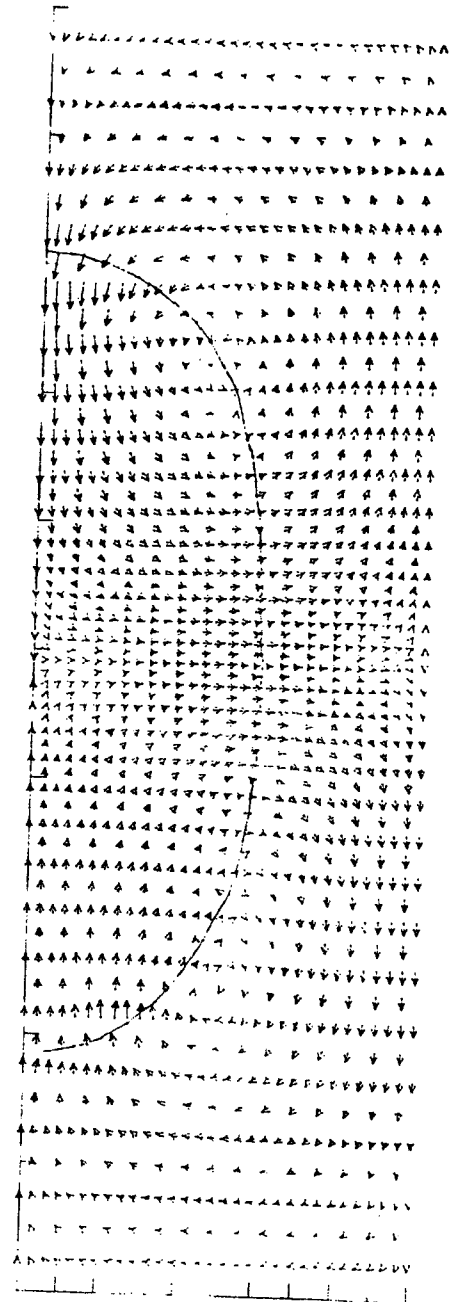
temps $t = 0.200E-01$, vitesse max. = 0.650E00

Figure 7.1



temps $t = 0.600E-01$, vitesse max. = 0.290E00

Figure 7.2



temps $t = 0.800E00$, vitesse max. = 0.590E-01

Figure 7.3

La précision - hormis les points au voisinage de l'angle (singularité) - de cette procédure s'est avérée être de 1 % sur la courbure, et bien entendu (vu la méthode) pas affectée par la présence de petits segments dans l'interface.

Pour le reste de l'essai, dont nous présentons un rapide résumé dans les Figures 7.2 et 7.3, nous pouvons faire les commentaires qualificatifs suivants : l'interface obtenue est vraisemblable et assez régulière ; nous avons constaté dans d'autres essais que le code était apte à corriger des instabilités numériques provoquant la formation d'angles sur l'interface : au pas de temps suivant apparaît une perturbation de la vitesse apte à corriger le défaut. Enfin l'interface reste relativement symétrique par rapport à la droite $y = 0.5$, malgré la non symétrie du maillage, puisque, rappelons-le, les rectangles sont tous coupés en deux triangles via la diagonale issue du sommet intérieur gauche.

8. - METHODE A INTERFACE LAGRANGIENNE.

Nous rendons compte dans ce Paragraphe de l'implémentation d'une méthode de déplacement matériel tout à fait classique (cf. Paragraphe 3.1 de DERVIEUX [1]); cette implémentation est motivée par la difficulté d'observer directement la vitesse des pointes et bulles avec la méthode de pseudo-densité.

La méthode choisie est de type particulaire : des particules représentant l'interface sont déplacées à l'aide de valeurs ponctuelles de la vitesse. Il y a donc jusqu'à un certain point incompatibilité avec l'approximation en vitesse qui est discontinue. Cette contradiction est résolue en construisant une interpolation P_1 continue de la vitesse, obtenue par projection orthogonale de son approximation P_1 non conforme (cf. le Paragraphe 5.3).

8.1. Algorithme de base.

Seul le traitement de l'interface diffère par rapport au schéma précédent ; il est défini par :

- 1) La représentation de l'interface : elle est formée de segments jointifs S_i S_{i+1} ; afin de pouvoir distinguer un milieu de l'autre, ces segments sont orientés de manière uniforme par rapport aux milieux (par exemple $S_1 S_2$ "tourne" dans le sens trigonométrique direct autour du fluide 1). A chaque sommet correspond une particule Lagrangienne.
- 2) Le déplacement de l'interface : chaque particule est déplacée de manière purement Lagrangienne à chaque pas de temps ; par exemple, si une particule est placée en (x,y) à l'instant t , ses coordonnées à l'instant $t+\delta t$ (après un pas de temps) seront données par $(x+\delta x, y+\delta y) = (x+\delta t u(x,y;t), y+\delta t v(x,y;t))$ où (u,v) est l'interpolée P_1 continue de la vitesse.
- 3) La prise en compte de l'interface dans l'équation en vitesse : elle est faite, comme dans la méthode des paragraphes précédents, à travers une⁽¹⁾ fonction ϕ qui joue donc ici seulement le rôle de "fonction couleur" ; cette fonction est calculée comme la distance à la chaîne de particules, affectée d'un signe déduit de l'orientation du segment le plus proche.

(¹) deux en simulation trifluide.

8.2. Procédures auxiliaires.

Il est bien connu (cf. le Paragraphe 3.1 de DERVIEUX [1]) que les méthodes particulières nécessitent souvent des procédés de rezonage et/ou lissage destinés à répartir de manière suffisamment uniforme les particules sur l'interface et à empêcher toute instabilité numérique dans sa représentation (ondulations...) ou pour prendre en compte un changement de connexité (séparation d'une bulle par exemple).

Dans le code présenté ici, le rezonage est réalisé par la substitution des segments de l'interface par les segments de l'isovaleur zéro de la fonction couleur ϕ (ex-pseudo-densité), ce qui assure une répartition raisonnable des particules ; cette procédure est appliquée périodiquement au cours de la simulation, de manière analogue à la "réinitialisation" décrite au Paragraphe 2.

Ce procédé permet aussi d'initialiser la simulation via la fonction couleur.

8.3. Quelques essais numériques.

Les données sont identiques à celles du Paragraphe 5.3 sauf le pas de temps $\delta t = 0,5$ (70 pas de temps). On peut comparer les deux méthodes - pseudo-densité et interface particulière sur les Figures suivantes :

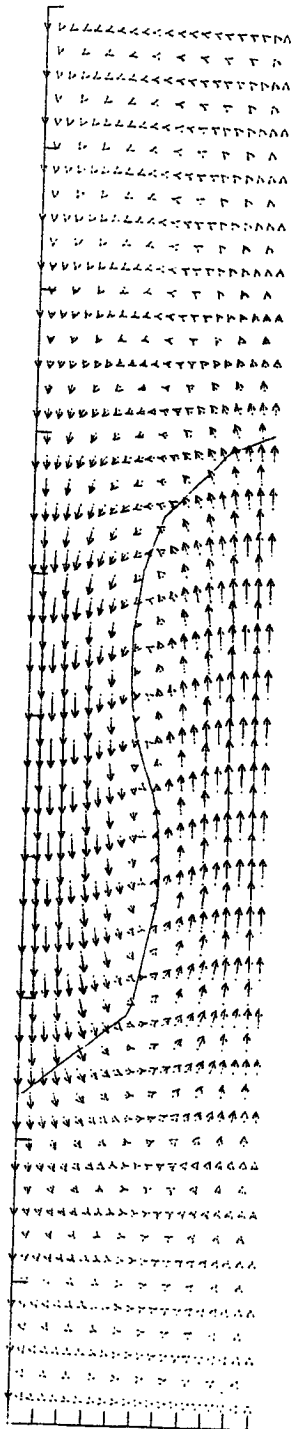
- Figures 8.1 et 8.2 : interface au bout de 35 secondes
- Figures 8.3 et 8.4 : évolution des particules à gauche
- Figures 8.5 et 8.6 : vitesse des particules à gauche
- Figures 8.7 et 8.8 : évolution des particules à droite
- Figures 8.9 et 8.10 : vitesse des particules à droite

On trouve des vitesses asymptotiques du même ordre :

	Vitesses asymptotiques	
	à gauche	à droite
pseudo-densité	135	137
interface particulière	138	138

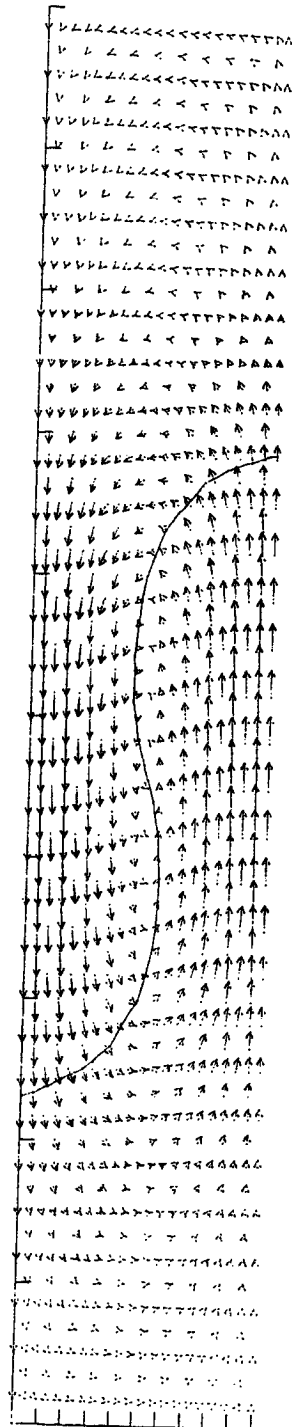
La conservation de la masse est vérifiée à .02% près par la pseudo-densité et à .2% près par l'interface particulière ; mais il est clair que dans ce

dernier cas l'essai a été poussé trop loin sans rezonage de sorte que les segments approchant les pointes et bulles sont trop longs.



TEMPS $t = 0.350E02$. VITESSE MAX. = $0.263E00$

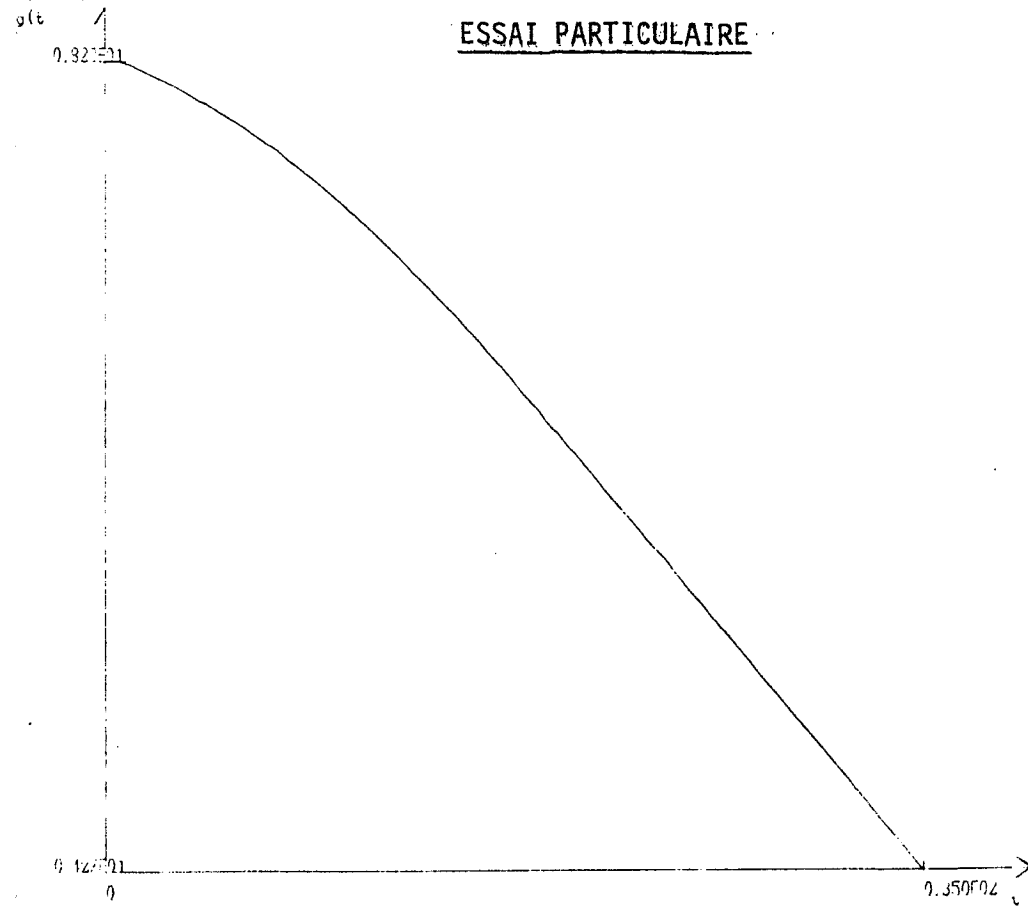
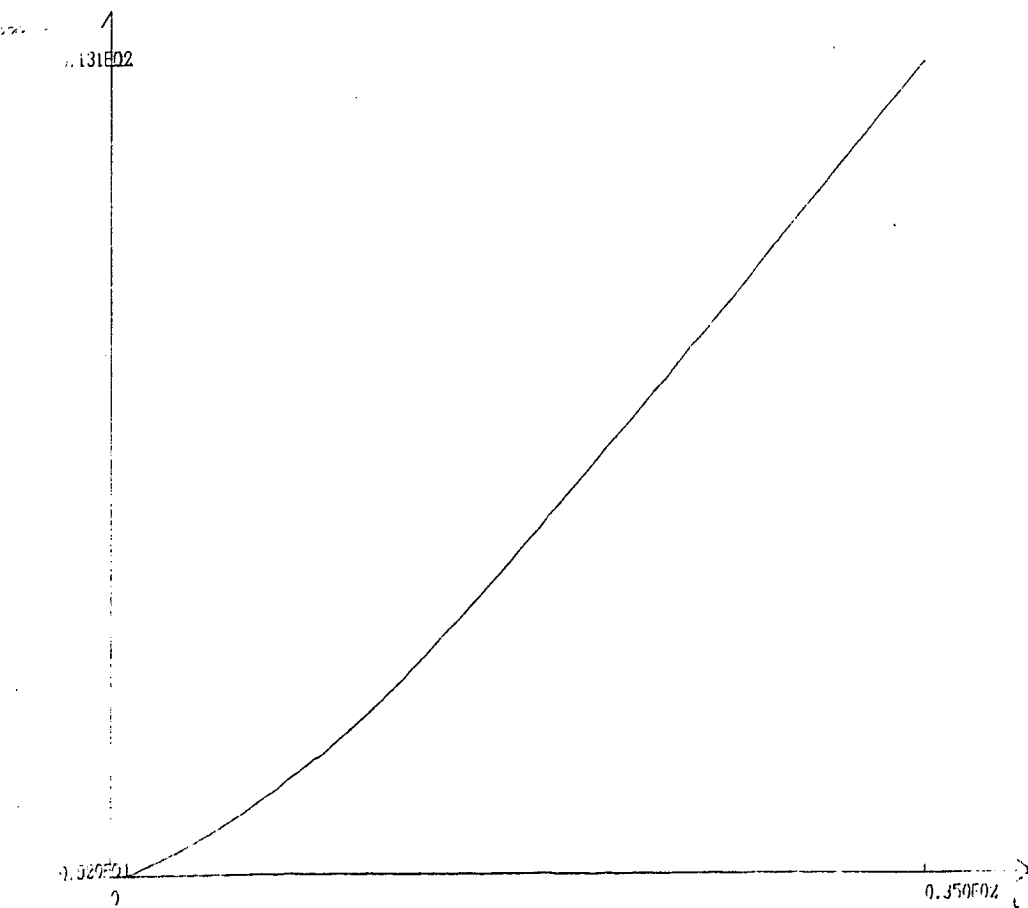
Figure 8.1

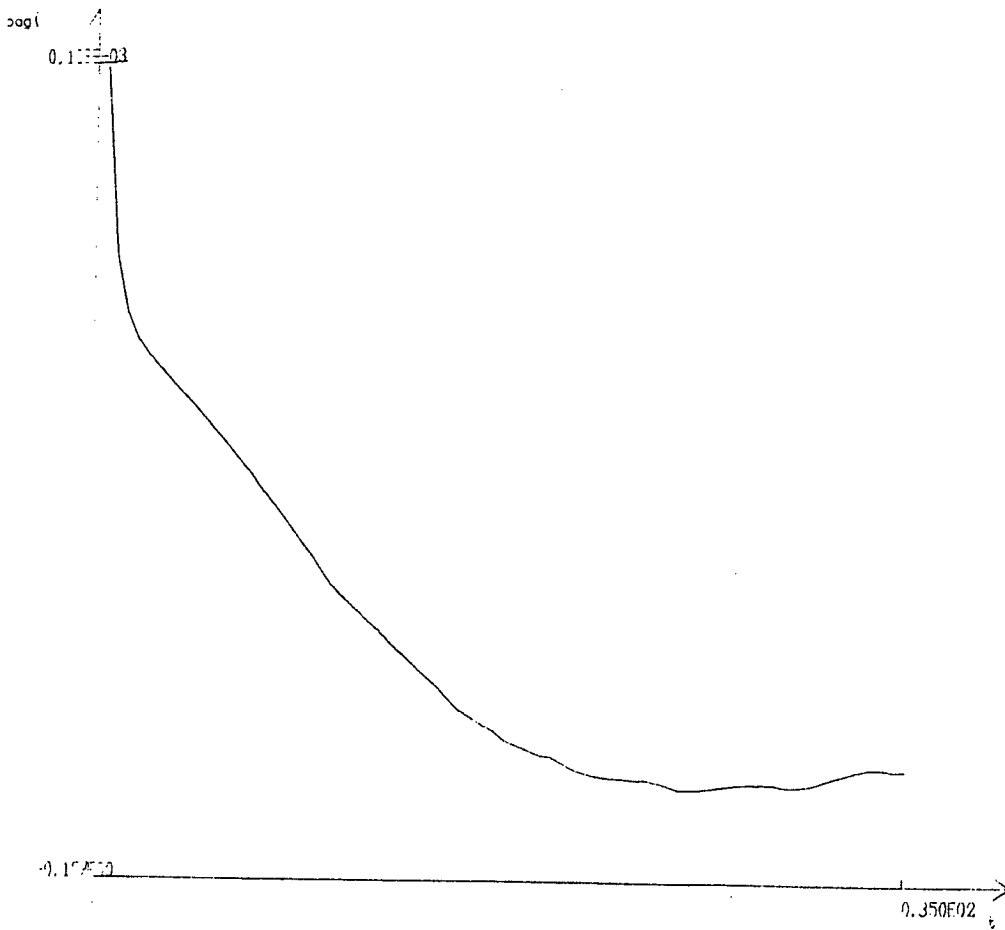


TEMPS $t = 0.350E02$. VITESSE MAX. = $0.267E00$

Figure 8.2

INTERFACES ET VITESSES

ESSAI PARTICULAIREPosition des particulesFigure 8.3
(à gauche)Figure 8.7
(à droite)



Vitesse des particules

Figure 8.5

(à gauche)

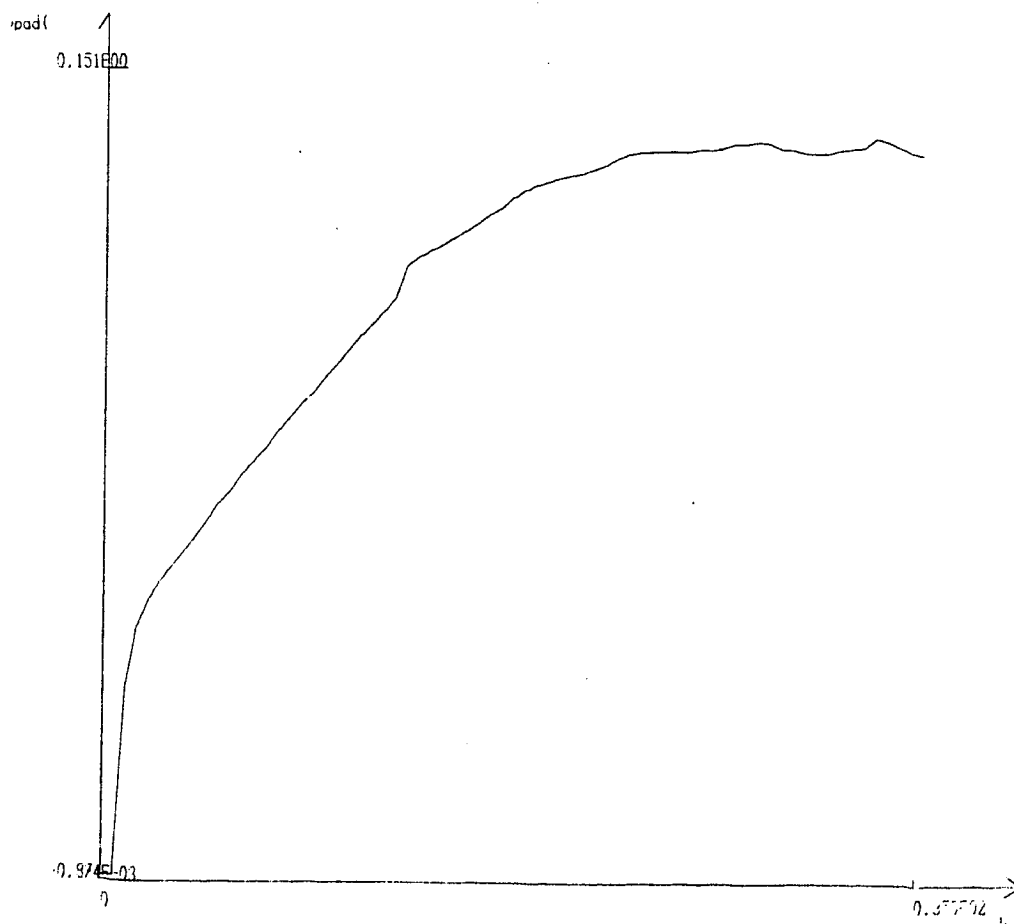
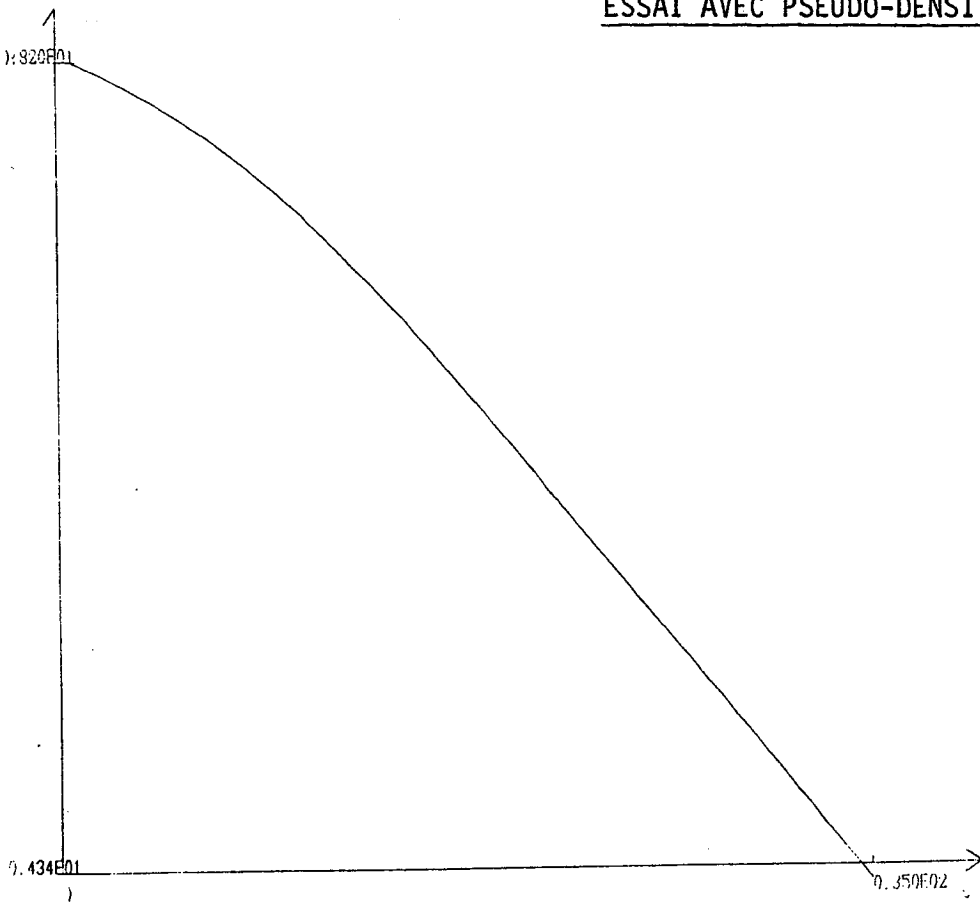
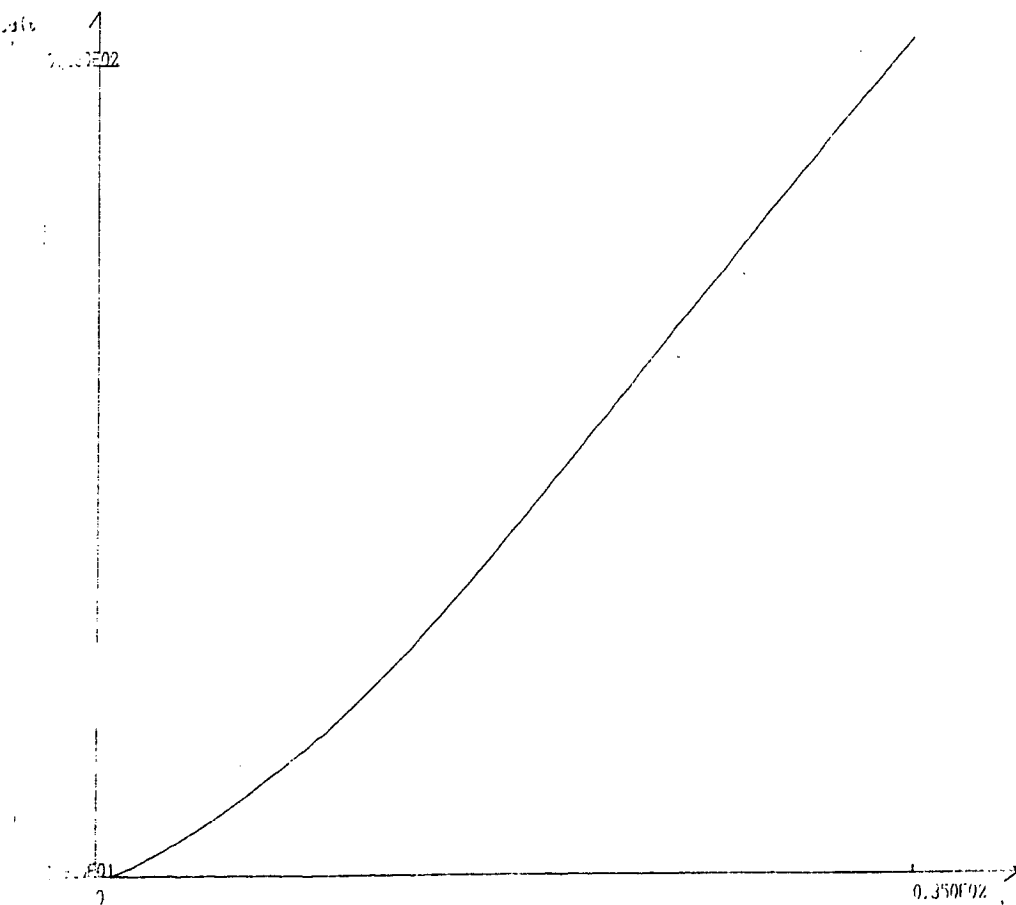


Figure 8.9

(à droite)

ESSAI AVEC PSEUDO-DENSITEPosition des particulesFigure 8.4

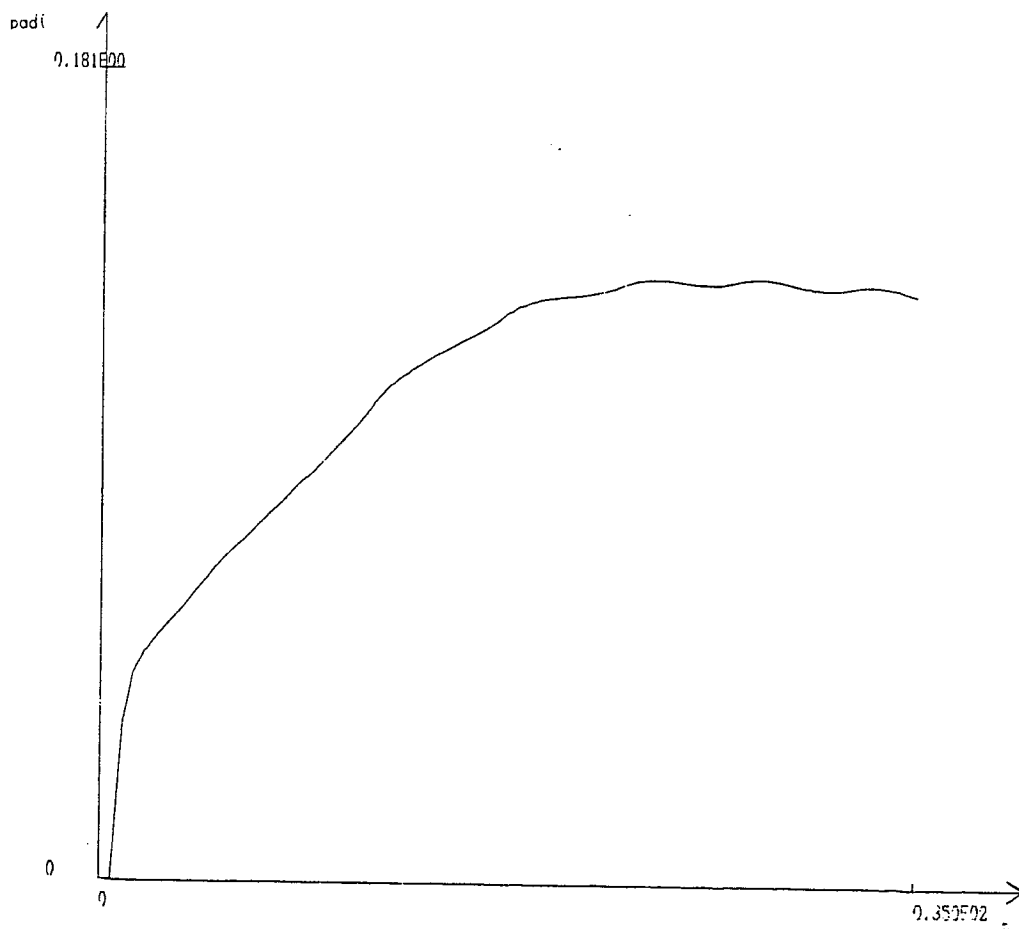
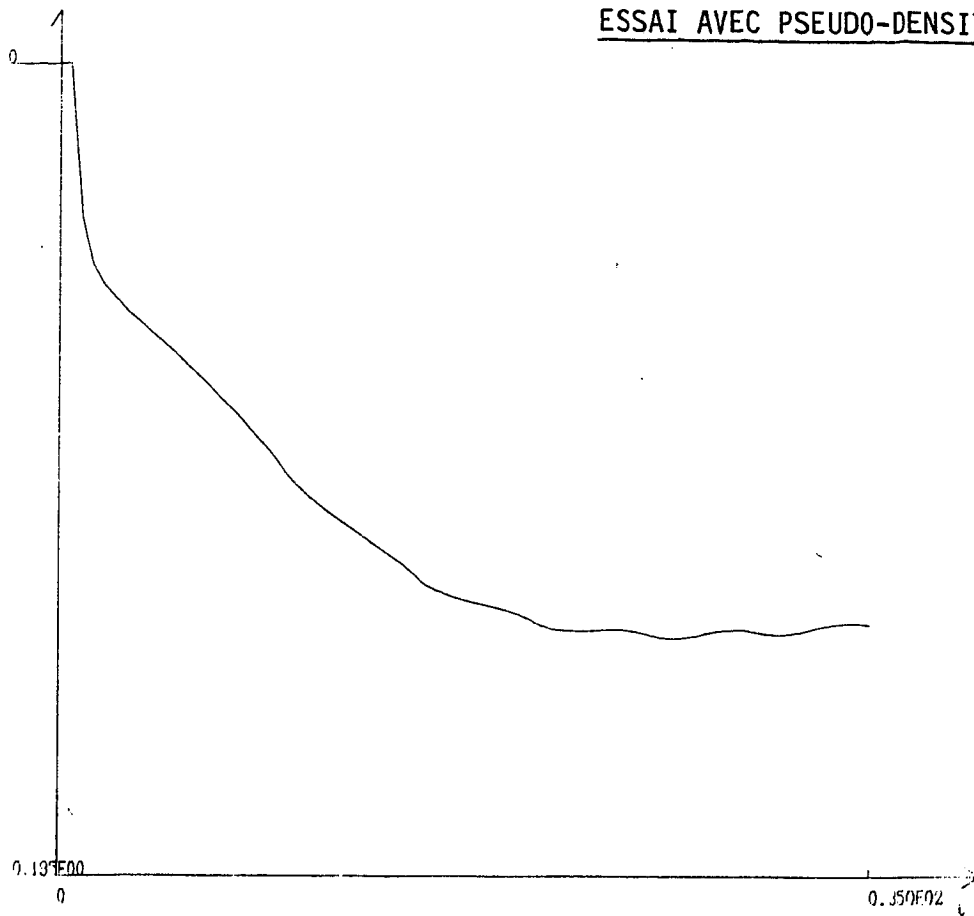
(à gauche)

Figure 8.8

(à droite)

ESSAI AVEC PSEUDO-DENSITEVitesse des particulesFigure 8.6

(à gauche)

Figure 8.10

(à droite)

BIBLIOGRAPHIE

D. BEGIS, A. PERRONNET

- [1] The club MODULEF, Pub. IRIA et Dunod, Paris (1979)

M.O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, B. MANTEL, J. PERIAUX, P. PERRIER, O. PIRONNEAU

- [1] A Finite Element Approximation of Navier-Stokes equations for incompressible viscous fluids. Iterative methods of solution, IUTAM Symposium, Paderborn (Germany), Approximation Methods for Navier-Stokes Problems, R. Rautmann Ed., Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin (1980).

M. CROUZEIX

- [1] Communication aux "Journées Eléments Finis", Rennes, 1976.

M. CROUZEIX, P.A. RAVIART

- [1] Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations, RAIRO (R-3), 33-75 (Dec. 1973).

B.J. DALY

- [1] Numerical Study of two fluid Rayleigh-Taylor Instability, The Physics of Fluids, 10, N° 2, 297-307 (1967).

A. DERVIEUX

- [1] Ecoulements multifluides, Ecole de l'INRIA sur la simulation numérique en mécanique des fluides par la méthode des éléments finis, Nice, 19-23 janvier 1981.

J.L. LIONS

- [1] Equations Différentielles Opérationnelles et Problèmes aux Limites, Springer, Berlin (1961)
- [2] On some problems connected with Navier-Stokes equations, Colloque Madison (1977)
- [3] On some questions in boundary value problems of Mathematical Physics, cours à l'Univ. Federal do Rio de Janeiro, Instituto di Mat. (1977).

P.A. RAVIART

- [1] Sur l'approximation de certaines Equations d'Evolution Linéaires et non Linéaires, Thèse Univ. Paris (1965).
- [2] Approximation Numérique des Phénomènes de Diffusion-Convection, cours à l'Ecole d'Eté d'Analyse Numérique EDF-CEA-INRIA, 18 juin - 6 juillet 1979. Pub. INRIA, Service Formation, Automatique (1980).

J. SIMON

- [1] Ecoulement d'un fluide non homogène avec une densité initiale s'annulant, C.R. Acad. Sc. Paris, 287, 1009-1012 (1978).

M. TABATA

- [1] A finite Element Approximation Corresponding to the Upwind Finite Differencing, Memoirs of Numerical Mathematics (Univ. of Kyoto and Tokyo), 4, 47-63 (1977).
- [2] Conservative Upwind Finite Element Approximation and its Applications (à paraître).

M. FORTIN

- [1] Calcul numérique des écoulements des fluides de Bingham et des fluides Newtoniens incompressibles par la méthode des éléments finis, Thèse Univ. de Paris VI (1972).

R. GLOWINSKI

- [1] Approximations externes par éléments finis de Lagrange d'ordre un ou deux du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique. Méthode itérative de résolution des problèmes approchés, Conférence on Numerical Analysis, Royal Irish Academy (1972).

F. HECHT

- [1] Construction d'une base de fonctions P_1 non conformes à divergence nulle dans \mathbb{R}^3 , RAIRO (à paraître).

P.M. LASCAUX

- [1] Méthodes Numériques pour les calculs d'écoulements 2-D instationnaires multifluides (1976), ISNM 37 Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart (1977), 9-48.

B. LEGAIT

- [1] Contribution à l'étude numérique des équations de Navier-Stokes à deux phases, Inst. Français du Pétrole, Rapport A77/74011 (1980).

P. LESAIN

- [1] Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis, thèse Univ. Paris VI (1975).

